EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.5

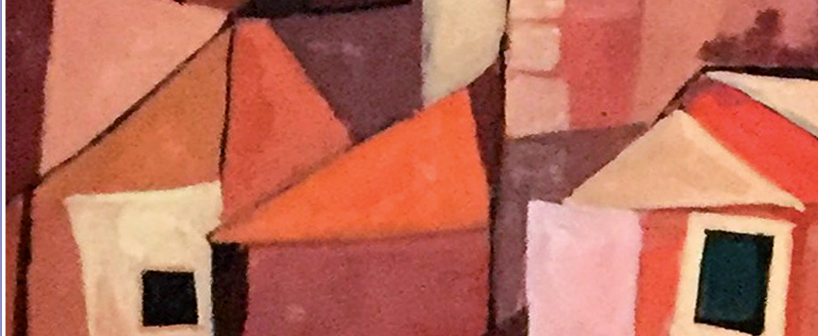
JAARGANG 93 - MAART 2018



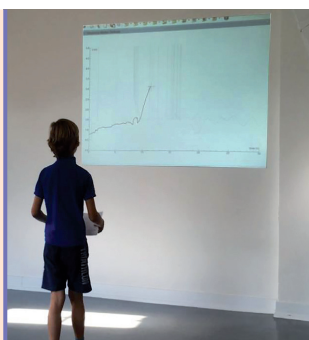
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 93 NR. 5



IN DIT NUMMER



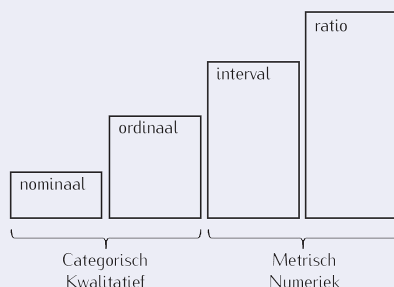


Rote Stadt, aquarel (1993) van Hans Jablonka (Klagenfurt, Oostenrijk)

Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Rectificatie
In het Kleintje Didactiek van Lonneke Boels over meet-niveaus in *Euclides* 93-3 is een storende fout geslopen in figuur 1. Waar er rechts 'kwalitatief' stond, had 'kwantitatief' moeten staan. Excuus, Lonneke!



Kort vooraf

12 februari jl was het 125 jaar geleden dat Marcel Minnaert is geboren. Zoiets ontdek je als je sprekers zoekt voor het thema Licht en Schaduw voor de Nationale Wiskunde Dagen, mede omdat je automatisch gaat grasduinen in Minnaerts opus magnum, *Natuurkunde van 't vrije veld.* Dat Minnaert een grote bron van inspiratie voor wiskunde-docenten kan zijn, beschreef Edu Wijdeveld, voormalig directeur van het IOWO, al in een artikel in de *Nieuwe Wiskrant.* Edu wilde destijds een mooie foto in dat artikel hebben van het portret van Minnaert, geschilderd door Pieter Defesche, dat in het Minnaertgebouw op de Uithof hangt. De gebouwbeheerder had het zelfs voor ons achter het glas vandaan gehaald zodat we die foto's buiten konden maken. Tijdens dat avontuur vertelde Edu over de didactische visie van Minnaert. In 1923 had hij het al over realistische natuurkunde, samenwerken en proeven doen met huis- tuin- en keukenmateriaal. Hij was zijn tijd ver vooruit!
Edu schreef dat artikel naar aanleiding van het verschijnen van een biografie, geschreven door Leo Molenaar. Alle genoemde literatuur is vrijgegeven en te downloaden van de *Euclides*-site. Makkelijker kunnen we het niet maken...
Maar er was ook een triest bericht. Op 27 januari jl overleed Frederik van der Blij, ook voormalig directeur van het IOWO, oud-collega van Minnaert, briljant didacticus en mede daarom erelid van onze vereniging. In de volgende *Euclides* blikken we terug op zijn leven.

Tom Goris

ZORGVULDIG MET WIJSHEID EN MILDHEID

Lidy Wesker
Peter Kop

Een correctievoorschrift is nooit zó waterdicht te krijgen dat alle correctoren dezelfde punten toekennen aan uitwerkingen van leerlingen. Voor een deel zit dat in de interpretatie van de 'bolletjes' in het CV, voor een deel in de interpretatie van regels voor de beoordeling. Goed dat er tweede correctoren zijn dus. Peter Kop en Lidy Wesker geven voorbeelden van discussiepunten tussen eerste en tweede correctoren van het wiskunde B-examen van 15 mei jl.

Reden tot zorg

De laatste jaren heeft het CvTE geprobeerd steeds meer gedetailleerdere correctievoorschriften te maken zodat gelijke prestaties gelijk beloond worden. Voor de correctie van wiskunde A/C verscheen in *Euclides* eind 2014 het artikel 'Gelijke monniken, gelijke kappen', waarin werd aangegeven hoe om te gaan met bepaalde problemen bij het nakijken van examens. Wiskunde B volgde deze richtlijnen met betrekking tot het afronden, gebruik van eenheden, de beschrijving van het gebruik van de grafische rekenmachine (GR) en het sprokkelen (met een uitzondering voor bewijzen). Met betrekking tot notatiefouten volgde wiskunde B niet:

Bij een wiskunde B-examen moet de leerling blijk geven antwoorden en bewijsvoeringen door middel van een zorgvuldig gebruik van notaties, symboliek en een heldere redeneertrant verkregen te hebben. Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.

In eerste instantie lijkt dit helder en weinig ruimte te geven voor discussie. In dit artikel geven we echter voorbeelden van onze eigen ervaringen bij de correctie van het eerste tijdvak van het vwo wiskunde B-examen 2017 en willen we laten zien dat er reden tot zorg is. Krijgt een leerling wel wat hij verdient en krijgen leerlingen met dezelfde prestatie ook dezelfde beloning? De steeds gedetailleerdere eindtermen geven sommige correctoren de indruk dat leerlingen letterlijk de bolletjes van het correctievoorschrift moeten noemen en dat er anders puntenaftrek volgt. De leerlingen zouden volgens deze correctoren 'maar moeten weten wat de examenmakers in het correctievoorschrift gezet hebben'.

Alle bolletjes genoteerd?

Uit 'Gelijke monniken, gelijke kappen':

Het bolletjesmodel dient op de volgende wijze gebruikt te worden om sprokkelen te voorkomen én om er voor te zorgen dat kandidaten geen punten onthouden worden waar zij recht op hebben.

I. Als een leerling een vraag goed beantwoordt en voldoende toelichting geeft, krijgt hij alle scorepunten voor de betreffende vraag. De onderverdeling van de scorepunten in het CV is niet van belang.

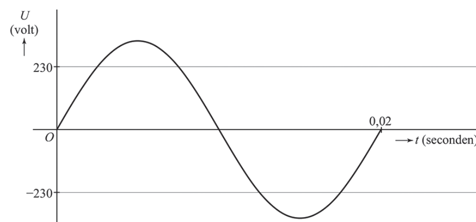
II. Als een leerling ergens in het oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, een kleine (reken)fout maakt, dan wordt hier conform vakspecifieke regel 1 een scorepunt voor in mindering gebracht, tenzij het bolletjesmodel anders aangeeft.

III. Als een leerling ergens halverwege afhaakt in een oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, wordt de onderverdeling (het bolletjesmodel) gebruikt om vast te stellen hoeveel scorepunten een leerling verdiend heeft. Het bolletjesmodel geeft dus het aantal scorepunten 'indien je niet verder komt dan hier, krijg je ... scorepunten'

Voorbeeld 1

In figuur 1 is een deel van vraag 2, het antwoord van een leerling en het betreffende deel van het CV te zien. De leerling schrijft het erg 'snel' op maar er is een verwijzing naar de grafiek, de *x*-cal(230) verwijst naar de optie in het *graph menu* van de Casio en de antwoorden zijn correct. Drie punten zouden we zeggen. Maar in de discussie met de tweede corrector komen de volgende passages aan bod: 'Hoe weet ik dat deze kandidaat de goede formule heeft gebruikt? Misschien wel een andere formule die toevallig dezelfde (goede) uitkomst geeft. In het CV wordt bolletje 1 gemist en daarom kan dat punt niet gegeven

De spanning op elektriciteitsdraden in het Nederlandse spanningsnet is een wisselspanning met formule $U(t) = 325\sin(100\pi t)$.



2 Bereken hoeveel procent van de tijd de spanning meer dan 230 volt van 0 afwijkt.

Graph → x-cal (230) → $x = 2{,}50 \cdot 10^{-3}$ en $x = 7{,}50 \cdot 10^{-3}$

- De vergelijking $230 = 325\sin(100\pi t)$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Twee tijdstippen binnen één periode zijn bijvoorbeeld 0,0025 en 0,0075 1
- Dit geeft $\frac{0{,}0075 - 0{,}0025}{0{,}02} \cdot 100\% = 25\%$ 1
- (Vanwege symmetrie is het gevraagde percentage dus $2 \cdot 25\% =$) 50% (of nauwkeuriger) 1

figuur 1 Vraag 2, oplossing van leerling en CV

worden.' Het verweer dat het eerste gedachtenbolletje impliciet genomen wordt, vindt geen genade.
In 'Gelijke monniken, gelijke kappen' staat toch duidelijk dat niet alle stappen van het CV vermeld hoeven te worden. Wel moet voldoende toelichting gegeven worden. De vraag is natuurlijk wanneer de toelichting voldoende is? Wij zouden zeggen: wanneer het oplossingsproces van de leerling navolgbaar is. Dit brengt ons wel tot een onderscheid tussen *toon aan*-vragen en *bewijs*-vragen enerzijds en 'gewone' vragen anderzijds waarin het oplossingsproces toegelicht moet worden. Terwijl in het laatste geval het criterium 'navolgbaar' gebruikt wordt, geldt voor het eerste dat 'Een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt' gegeven moet worden. Correctoren kunnen bij een toelichting dus niet vasthouden aan 'alle bolletjes moeten er staan' en zullen dus per geval de toelichting moeten beoordelen.

Een andere situatie doet zich voor als een leerling wel een aantal stappen zet in de goede richting, maar niet tot een goed einde komt. In het volgende voorbeeld wordt enkel gekeken naar de bolletjes in het correctievoorschrift en krijgt een leerling alleen 2 punten voor de goede afgeleide.

Voorbeeld 2
In vraag 10 wordt gevraagd naar een exacte berekening van *a* en *b* als de grafiek van een functie $g(x) = ax^2 + bx$ de grafiek van de gegeven *f(x)* raakt in (0, 0) en (π, 0). In het antwoord, zie figuur 2, ontbreekt een belangrijke factor (zoals door de corrector is aangegeven). Al het (denk)werk van deze leerling na de afgeleide blijft onbeloond, omdat de tweede corrector geen volledige bolletjes wist te vinden, zie het CV in figuur 3. Toch is deze leerling een eind op weg en zou via $y = p(-x^2 + \pi x)$ de vraag succesvol kunnen afronden. Een hogere honorering dan 2 punten, verwijzend naar artikel 3.3 van het CV zou op zijn plaats geweest zijn.

f(x) = 3 sin(x) − 2 sin²(x)
f'(x) = 3 cos x − 4 cos x . sin x

— helling berekenen bij x = 0 en x = π

f'(0) = 3 cos 0 − 4 cos 0 . sin 0
= 3 . 1 − 4 . 1 . 0
= 3

f'(π) = 3 cos π − 4 cos π . sin π
= 3 . −1 − 4 . −1 . 0
= −3

We weten dat het een berg parabool dus a is negatief ook ligt de top bij x = 0,5π.

y = (−x² + πx), dus a = −1 en b = π. (factor)

figuur 2 Oplossing van leerling van vraag 1

maximumscore 6
- $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$ 2
- $g'(x) = 2ax + b$ 1
- $g'(0) = f'(0)$ geeft $b = 3$ 1
- $g(\pi) = 0$ en $b = 3$ geeft $a\pi^2 + 3\pi = 0$ 1
- Hieruit volgt $a = \frac{-3}{\pi}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of
- $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$ 2
- $g'(x) = 2ax + b$ 1
- $g'(0) = f'(0)$ geeft $b = 3$ 1
- $g'(\pi) = f'(\pi)$ en $b = 3$ geeft $2a\pi + 3 = -3$ (of $g'(\frac{1}{2}\pi) = 0$ geeft $a\pi + 3 = 0$) 1
- Hieruit volgt $a = \frac{-3}{\pi}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of
- $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$ 2
- $g'(x) = 2ax + b$ 1
- $g(\pi) = 0$ geeft $b = -a\pi$ 1
- $g'(\pi) = f'(\pi)$ en $b = -a\pi$ geeft $a\pi = -3$ 1
- Hieruit volgt $a = \frac{-3}{\pi}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) en $b = 3$ 1

of
- $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$ 2
- $g(\pi) = 0$ geeft $g(x) = ax(x - \pi) = ax^2 - a\pi x$, dus $b = -a\pi$ (of $x_{top} = -\frac{b}{2a}$ geeft $b = -a\pi$) 1
- $g'(x) = 2ax - a\pi$ 1
- $g'(0) = f'(0)$ geeft $-a\pi = 3$ 1
- Hieruit volgt $a = \frac{-3}{\pi}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) en $b = 3$ 1

figuur 3 CV van vraag 10

Notatiefouten?

Het artikel 'Gelijke monniken, gelijke kappen' is met betrekking tot verschrijvingen bij wiskunde A/C mild. De wiskunde B vaksectie heeft deze mildheid niet overgenomen:

Bij een wiskunde B-examen moet de leerling blijk geven antwoorden en bewijsvoeringen door middel van een zorgvuldig gebruik van notaties, symboliek en een heldere redeneertrant verkregen te hebben. Daarom geldt de nieuwe vakspecifieke regel m.b.t. notatiefouten, zoals geformuleerd voor wiskunde A/C, niet voor wiskunde B. Bij wiskunde B dienen notatiefouten (verschrijvingen) dus aangerekend te worden zoals beschreven in vakspecifieke regel 1.

Toch is het de vraag hoe rigide aan deze regel vastgehouden moet worden. Hoe streng moeten we zijn?

Voorbeeld 3

figuur 4 Oplossing van leerling van vraag 11

Gevolgd door het aangeven dat een *e*-macht niet 0 kan zijn en:

figuur 5

In plaats van variabele *t* wordt in de eerste regel ook variabele *x* geïntroduceerd (zie figuur 5). Deze beïnvloedt het oplossingsproces niet. Is hier sprake van een verschrijving/notatiefout? Of is het passabel, zoals wij hier bepleiten en door de tweede corrector in ons geval werd geaccepteerd?

In navolging van wiskunde A/C pleiten wij voor een zekere mildheid, ook bij wiskunde B. Dus een leerling die in voorbeeld 4 in de toelichting op zijn antwoord in de tweede regel geen haakjes opschrijft maar er wel mee werkt (zie figuur 6) zou volgens ons geen puntenaftrek verdienen.

Voorbeeld 4

figuur 6 Antwoord van een leerling op vraag 11

In de voorbeelden 5 en 6 leidde een kleine verschrijving (zoek ze zelf...) tot puntenaftrek. Dat scheelde de betreffende leerling twee keer 1 punt (op een totaal van 69 punten). Volgens ons zou in deze gevallen geen punten-aftrek nodig zijn. Zoiets zou bijvoorbeeld ook gelden als een leerling een aantal keer een integraal correct opschrijft en één keer de d*x* vergeet.

Voorbeeld 5

figuur 7

Voorbeeld 6

$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

$g(x) = \sin(x - \frac{2}{3}\pi)$

$AB = f(x) - g(x)$

$= \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) - \frac{1}{4}\sqrt{3} - \sin(x - \frac{2}{3}\pi)$

$AB' = \cos(2x - \frac{2}{3}\pi) - \cos(x - \frac{2}{3}\pi)$

$AB' = 0$

$\cos(2x - \frac{2}{3}\pi) = \cos(x - \frac{2}{3}\pi)$

$2x - \frac{2}{3}\pi = x - \frac{2}{3}\pi \lor 2x - \frac{2}{3}\pi = -(x - \frac{2}{3}\pi)$

$x = 0 \pmod{2\pi}$

$3x = \frac{4}{3}\pi \pmod{2\pi}$

$x = \frac{4}{9}\pi \pmod{\frac{2}{3}\pi}$

Dus als $p = \frac{4}{9}\pi$

figuur 8

Toelichting bij GR?

In ‘Gelijke monniken’ wordt al genoemd dat de GR steeds vanzelfsprekender wordt. Een integraal of een snijpunt op de GR berekenen is een kwestie van rechtstreeks intikken. Een handeling die leerlingen al vele keren hebben uitgevoerd. Wat moet nog worden opgeschreven in een toelichting bij het antwoord?

Voorbeeld 7

Als onderdeel van vraag 13 moet de vergelijking $300 = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9}$ worden opgelost.

Snijpunten $T=300$ bij $T_n(t)$ is $t = 6,36 \lor t = 63,41$

figuur 9

De leerling schrijft wel heel weinig op, maar is prima te volgen. Het is impliciet duidelijk hoe de leerling gewerkt heeft. De tweede, niet-relevante oplossing, dient als bewijs hiervoor. Volgens de tweede corrector kon de leerling het punt van ‘Beschrijven hoe de vergelijking kan worden opgelost’ niet krijgen en dus werd de leerling met een punt aftrek bestraft.

Deze voorbeelden zijn slechts een illustratie van de discussies die er tussen eerste en tweede corrector plaatsvinden.

Samenvattend

Natuurlijk blijven er situaties waarin discussie mogelijk is. Pogingen om het CV zodanig op te stellen dat deze niet meer optreden lijkt ons onmogelijk, en ook onwenselijk. De huidige pogingen tot een meer gedetailleerd CV lijken een aantal correctoren op het idee te brengen en in het idee te steunen dat ze uitsluitend bolletjes moeten zoeken en vaststellen of de leerlingen precies dat hebben opgeschreven. We zien verschil in de strengheid van een bewijs in vergelijking tot de strengheid in een toelichting bij een antwoord. Bedenk daarbij dat ook wij als docenten dat verschil in de dagelijkse lespraktijk maken. Dit houdt niet in dat ‘alles’ maar goed gerekend moet worden. Uiteindelijk willen we dat leerlingen problemen leren oplossen, leren hun gedachten te verwoorden en sluitende redeneringen (en bewijzen) te vinden en te noteren. Vragen met betrekking tot het laatste verdienen extra zorgvuldigheid van de leerlingen. Bij andere vragen moet de gedachtengang van de leerling navolgbaar zijn. En dat is een ander criterium dan een sluitend bewijs. Zonder deze wijsheid en mildheid worden leerlingen afgerekend op ‘kleine’ zaken en raken we het zicht op de beoordeling van de hoofdzaak kwijt, namelijk dat leerlingen leren zelfstandig problemen op te lossen.

‘KRIJGT EEN LEERLING WEL WAT HIJ VERDIENT EN KRIJGEN LEERLINGEN MET DEZELFDE PRESTATIE OOK DEZELFDE BELONING?’

Met bovenstaande voorbeelden hebben we getracht aan te tonen dat correcties, zonder te sprokkelen, met wijsheid en mildheid gedaan kunnen en moeten worden om het werk van leerlingen eerlijk te beoordelen.

Over de auteurs

Lidy Wesker is docent wiskunde op het Bonhoeffercollege, Castricum en lerarenopleider bachelor en master wiskunde, HvA Amsterdam. E-mailadres: *l.j.b.wesker-elzinga@hva.nl.*
Peter Kop is docent wiskunde op GSG LeoVroman, Gouda, vakdidacticus universitaire lerarenopleiding Iclon Leiden en voormalig lid van vaksectie CvTE wiskunde A/C.
E-mailadres: *KopPMGM@iclon.leidenuniv.nl.*

SYMMETRIE IN ALGEBRA

Martin Kindt

Symmetrie kom je overal in de wiskunde tegen. Ook in algebra, al blijft dit in ons onderwijs vaak onderbelicht. In dit artikel wil Martin Kindt een lans breken om in de schoolalgebra ook meer aandacht te besteden aan symmetrische expressies.

Nostalgebra

In mijn schooltijd werd het volgende stukje theorie als parate kennis bij vierkantsvergelijkingen beschouwd:

Als x_1 en x_2 de oplossingen zijn van de vergelijking

$ax^2 + bx + c = 0$ (met $a \neq 0$), geldt

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{en} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Beide formules kunnen rechtstreeks uit de *abc*-formule worden afgeleid, op zich een prima oefening in algebra, maar eleganter is het om op te merken dat

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
en
$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Met die som- en productformules moest natuurlijk ook worden geoefend. Het was toen standaard om bij een gegeven vierkantsvergelijking 'speciale' uitdrukkingen in x_1 en x_2 te berekenen zonder die vergelijking eerst op te lossen.

Voorbeeld: $x^2 - 8x + 14 = 0$ met wortels x_1 en x_2.

Te berekenen: $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$ en $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Oplossing: $x_1 + x_2 = 8$ en $x_1 \cdot x_2 = 14$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8^2 - 2 \cdot 14 = 36$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8^3 - 3 \cdot 8 \cdot 14 = 176$$

De laatste vorm kon ook zó worden behandeld:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2(x_1 + x_2) =$$

$$8 \cdot 36 - 14 \cdot 8 = 176$$

De som van de omgekeerde wortels vraagt minder algebravuurwerk. Er volgt immers direct:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Bij deze opgave staat er ook een andere weg open: maak eerst een vierkantsvergelijking waaraan de omgekeerden van x_1 en x_2 voldoen.

Dit wordt dan:
$$\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x} + 14 = 0$$
ofwel:

$$14x^2 - 8x + 1 = 0$$
hetgeen opnieuw de uitkomst $\frac{4}{7}$ oplevert.

Als leerling vond ik dit leuke algebra, zonder dat ik me afvroeg wat het nut ervan was. Sprak de *symmetrie* (in x_1 en x_2) van die speciale vormen mij aan?
En ja, er was toen natuurlijk ook een prominente rol voor de discriminant D weggelegd. Dat D ook kon worden geschreven als:

$$a^2\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}\right) = a^2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]$$
met als gevolg:

$$D = a^2(x_1 - x_2)^2$$
kan ik me niet herinneren uit mijn schooltijd. Mooi is dit wel. Dat bij $D = 0$ de wortels samenvallen wordt nog eens bevestigd en dat bij $D < 0$ de wortels irreëel (en toegevoegd complex) zijn, is ook direct duidelijk.

De achtergrond van de voorgaande opgaven is dat *symmetrische* polynomen in x_1 en x_2 (of quotiënten daarvan) zich laten uitdrukken in twee basispolynomen, te weten $x_1 + x_2$ en $x_1 \cdot x_2$. Dat werd er door mijn leraar destijds niet bij verteld. Ik meen me te herinneren dat ik

dit later als leraar wél eens heb gedaan. Op een bewijs daarvan heb ik mijn leerlingen nooit getrakteerd. Dat is ook niet heel simpel, maar als je een keer 'mooie' algebra wilt demonstreren, is het wel een uitdaging.

Symmetrische polynomen in twee variabelen

In plaats van x_1 en x_2 zal ik hier de variabelen x en y gebruiken. Laat $F(x, y)$ een polynoom in x en y zijn. We noemen F symmetrisch als $F(x, y) = F(y, x)$ voor alle mogelijke waarden van x en y. Een voorbeeld van een symmetrisch polynoom is:

$$x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4.$$

Insiders weten dat dit polynoom gelijk is aan $(x-y)^4$ en dat in die tweede vorm ongestraft x en y kunnen worden verwisseld vanwege de *even* exponent.

Anders is dit bij $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ ofwel $(x-y)^3$. Hier is sprake van een polynoom waarbij verwisseling van x en y tot een *tegengesteld* polynoom leidt. Je zou dit een *antisymmetrisch* polynoom kunnen noemen.
De meest basale symmetrische polynomen in x en y zijn $x + y$ en $x \cdot y$ die ik hier in het vervolg zal aanduiden met respectievelijk S en P. Een belangrijke stelling uit de algebra zegt nu:
Elk symmetrisch polynoom in x en y is te schrijven als een polynoom in S en P. [1]

Zo geldt bijvoorbeeld:

$$x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4=S^4-8S^2P+16P^2.$$

Immers: $(x-y)^4$ is het kwadraat van $(x-y)^2$ of S^2-4P.
Nu volgt het bewijs van de stelling dat zo'n expressie in S en P bij elk symmetrisch polynoom bestaat.
Laat $F(x, y)$ een symmetrisch polynoom zijn. Stel dat $c\cdot x^k y^m$ een term van F is. Dan zal ook $c\cdot x^m y^k$ een term van F moeten zijn. Stel verder $k \geq m$.

De tweeterm $c\cdot x^k y^m+c\cdot x^m y^k$ laat zich dan schrijven als

$$c\cdot(xy)^m(x^{k-m}+y^{k-m})=c\cdot P^m(x^{k-m}+y^{k-m})\cdot$$

Een symmetrisch polynoom is dus de som van zulke tweetermen en/of termen van de vorm $c\cdot x^n y^n$.
Het komt er dus slechts op aan om te bewijzen dat een tweeterm van de vorm x^n+y^n uit te drukken is in S en P. Voor de exponenten 2 en 3 is dat eerder in dit artikel aangetoond. Bij de tweede aanpak van $x_1^3+x_2^3$ heb ik laten zien dat je een inductiestap kunt maken. Meer algemeen geldt:

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}+y^{n-1})-xy(x^{n-2}+y^{n-2})$$

ofwel

$$x^n+y^n=S(x^{n-1}+y^{n-1})-P(x^{n-2}+y^{n-2})\dots(*)$$

En zo kunnen we een willekeurig lange lijst maken van sommen van de vorm x^n+y^n uitgedrukt in S en P.

$x^0+y^0=2$
$x^1+y^1=S$
$x^2+y^2=S^2-2P$
$x^3+y^3=S(S^2-2P)-PS=S^3-3SP$
$x^4+y^4=S(S^3-3SP)-P(S^2-2P)=S^4-4S^2P+2P^2$
$x^5+y^5=S(S^4-4S^2P+2P^2)-P(S^3-3SP)=S^5-5S^3P+5SP^2$

Enzovoort

Een schoolvoorbeeld van inductie waarbij regel (*) ervoor zorgt dat die inductie volledig is. Het bewijs van de symmetriestelling voor polynomen in twee variabelen is hiermee geleverd.

Werk van Girard

De uit Frankrijk naar Nederland gevluchte Albert Girard (1595-1632) schreef in *L'inventon nouvelle en l'algèbre* over het verband tussen het aantal wortels en de graad van een polynoomvergelijking. Hij was daarmee een van de eerste wiskundigen die dit expliciteerde. Ook beschouwde hij symmetrische expressies in de wortels. In zijn bronnenboek[2] beschrijft Struik hoe Girard de som van gelijke machten van wortels van polynoomvergelijkingen uitdrukte in de coëfficiënten van die polynomen. Girard beschouwde vergelijkingen van het type

$$x^n=Ax^{n-1}-Bx^{n-2}+Cx^{n-3}-Dx^{n-4}+\cdots$$

met een constante als laatste term van het rechterlid.
Laat nu S_k de som van de k-de machten van de wortels zijn, dan geldt:

$$S_1=A$$
$$S_2=A^2-2B$$
$$S_3=A^3-3AB+3C$$
$$S_4=A^4-4A^2B+4AC+2B^2-4D$$

of in de notatie van Girard:
A
Aq – B2
Acub – AB3 + C3
Aqq – AqB4 + AC4 + Bq2 – D4

Dit kan allemaal worden bewezen via factorisatie:

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\dots=$$
$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Voor de vergelijking $x^2=Ax-B$ (dus $C = D = \dots = 0$) correspondeert Girards resultaat met de derde van de lijst S,P-formules uit de vorige kolom.

Nu het geval $n = 3$, dus $x^3 = Ax^2 - Bx + C$, met de wortels (al of niet complex) x_1, x_2 en x_3.
Uit de factorisatie volgt:

$$A = x_1 + x_2 + x_3$$
$$B = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$
$$C = x_1x_2x_3$$

Er geldt nu:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

zodat inderdaad

$$S^2 = A^2 - 2B$$

Ook geldt:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1)$$

De laatste uitdrukking noem ik tijdelijk X, zodat nu:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = A(A^2 - 2B) - X$$

Er volgt dan nog:

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3(x_1x_2x_3)$$

ofwel:

$$X = AB - 3C$$

zo dat:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = A(A^2 - 2B) - (AB - 3C) = A^3 - 3AB + 3C$$

De vierde regel van Girard laat ik aan de lezer.

Alle zojuist gepasseerde polynomen in x_1, x_2 en x_3 zijn symmetrisch. Dat betekent dat ze bestand zijn tegen elke permutatie van de drie variabelen. Het stoeien met dergelijke polynomen was Girard wel toevertrouwd! Zonder bewijs vermeld ik hier dat elk symmetrisch polynoom in de variabelen x_1, x_2 en x_3 uitgedrukt kan worden in de basispolynomen A, B en C, dus in de coëfficiënten van de 'algemene' derdegraadsvergelijking. Analoge uitspraken kunnen worden gedaan voor vergelijkingen van de hogere graad[1]. De basispolynomen van de graad n worden gevonden door het product

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

uit te werken tot een veelterm. Symmetrische polynomen spelen een belangrijke rol in de 'hogere algebra' die in de negentiende eeuw is uitgemond in de beroemde theorie van Galois. Men zou kunnen stellen dat Girard een van de vroege wegbereiders van die theorie is geweest!

Meer attentie op school voor symmetrie?!

De dichter K. Schippers was misschien getroffen door algebraïsche symmetrie toen hij dit gedicht schreef:

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

je schoonheid min je ogen noem ik *a*
de geest die in je dartelt *b*
je ogen *c*
opgeteld en minstens een kwadraat gegeven:
$(a + b + c)^2$

Ongetwijfeld heeft hij, net als ik, de formule voor het kwadraat van $a + b + c$ in het eerste of tweede jaar van het vo door zijn wiskundeleraar voorgeschoteld gekregen. Hoe mijn leraar de regel bewees, weet ik me niet te herinneren. Misschien ging het via:

$$((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + c^2 + 2(a + b)c.$$

Zelf zou ik eerder een plaatje tekenen:

	a	**b**	**c**
a	a^2	ab	ac
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	c^2

figuur 1

De tegenwerping kan natuurlijk zijn, dat dit alleen valide is voor positieve a, b en c. Als je het plaatje opvat als een vermenigvuldigingstabel, verdwijnt dit bezwaar.
En wat te denken van deze redenering? $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ klopt in *elk* van de drie gevallen $c = 0$, $b = 0$ en $a = 0$ (standaard merkwaardig product). Het rechterlid moet symmetrisch zijn in a, b, c en uitsluitend tweedegraadstermen bevatten, klaar. Subtiel? Zeker, maar wel een mooi staaltje van wiskundig redeneren. Na zo'n uitleg kan aan leerlingen gevraagd worden zelf een formule voor $(a + b + c + d)^2$ te vinden en die op een paar manieren te verklaren. Om het ludiek te houden zou je kunnen vragen om daarbij een gedicht in de stijl van K. Schippers te bedenken. Een uitdaging kan ook zijn om naar het *aantal* termen te kijken. Bij de uitwerking van $(a + b + c + d)^2$ is dat tien, maar kun je zonder uitwerken ook vinden hoe dit aantal wordt bij het kwadraat van vijf termen of als je het hele alfabet in het kwadraat neemt: $(a + b + c + \ldots + z)^2$?
Combinatoriek dus. Bij n termen is de uitkomst

$$n + \tfrac{1}{2}n(n - 1)$$

en dat dit juist gelijk is aan

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

kan hetzij algebraïsch, hetzij combinatorisch worden aangetoond. Een ander vervolg op de formule van K. Schippers, is om $(a + b + c)^3$ uit te werken. Dat kan natuurlijk via
$a(a + b + c)^2 + b(a + b + c)^2 + c(a + b + c)^2$
of, als je het aanschouwelijk wilt maken, via een kubus met 27 kamers. Beschouw figuur 1 als de plattegrond van die kubus en zet daar in gedachten drie verdiepingen op met hoogte respectievelijk a, b en c. Dit leidt tot een homogene veelterm van de derde graad, waarbij de symmetrie zich laat verifiëren. Ook bij 'transcendente expressies', zoals $\sin(x + y)$ of $\ln(xy)$, is het goed om op symmetrie te letten. De hiermee equivalente vormen, als $\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$ en $\ln x + \ln y$ moeten ook de toets op symmetrie kunnen doorstaan! Expliciet leerlingen op dit soort symmetrieën - of antisymmetrieën, zoals bij $\sin(x - y)$ - te wijzen, lijkt mij heel nuttig.

(Denk)sport?

Het uitdrukken van symmetrische vormen met twee variabelen in de som en het product van de wortels van een vierkantsvergelijking werd door mij destijds als een sport beschouwd. Misschien zien de leerlingen van nu de sommen in het algebraboek ook wel zo. Is dat erg? Nee, maar de ene sport is wel leuker en vooral, staalt meer 'denkspieren', dan de andere. Zo zou ik het geen dom idee vinden om tijd te besteden aan het uitdrukken in $S\ (= x + y)$ en $P\ (= xy)$ van symmetrische expressies in x en y. Dit kan best zonder vierkantsvergelijking op de achtergrond. Vraag bijvoorbeeld om een vorm als x^2y+y^2x of als $(x - y)^2$ uit te drukken in S en P[3].
En natuurlijk kunnen leerlingen worden uitgedaagd om zelf symmetrische expressies te verzinnen en die uit te drukken in S en P. Of beter nog: om hun medeleerlingen zelfbedachte opgaven van die soort op te geven.

Noten

[1] Zie Stewart, I. (1989). *Galois Theory*. Londen: Chapman and Hall. Of: Waerden, B.L. van der (1955). *Algebra I*. Berlijn: Springer Verlag.
[2] Struik, D.J. (1986). *A source book in Mathematics. Princeton:* Princeton University Press.
[3] Kindt, M. (2016). *Geen week zonder Algebra*, een bundel productieve oefeningen. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

BERICHTEN UIT HET VMBO

LESGEVEN ZONDER CIJFERS

Jörgen van Remoortere

Over vmbo-leerlingen wordt vaak gezegd dat ze alleen leren voor een cijfer en voor jou als docent.
De interesse voor het vak lijkt minimaal. Slechte cijfers bevestigen voor te veel leerlingen het gevoel van 'zie je wel dat ik niks van wiskunde snap'. Een onbevredigende situatie. Jörgen van Remoortere gooide daarom zijn onderwijs over een andere boeg en ging lesgeven zonder cijfers.

Zelfvertrouwen en motivatie

Oktober 2015 was voor mij een kantelpunt in mijn kijk op onderwijs. Ik verdiepte me in het lesgeven aan hoogbegaafde leerlingen[1] en las het boek *Cijfers geven werkt niet* van Dylan Wiliam.[2] De rode draad: de sleutel tot echt leren is het aanboren van zelfvertrouwen en motivatie. Ik wilde nieuwe lesmethodieken uitproberen, maar school verwacht cijfers. En dat knelt.
Volgens Wiliam stopt het leren van leerlingen, zodra ze een cijfer terugkrijgen.[3] Toetsen worden met name ingezet aan het eind van een blok theorie. Op dat moment wordt (pas) gemeten wat de leerling heeft begrepen van de lesstof van de afgelopen weken. De leerling heeft na de toets geen tijd meer om van zijn fouten te leren, te oefenen en later opnieuw te laten zien wat hij kan. Toetsen moeten daarom vaker en eerder ingezet worden als formatief instrument, volgens Wiliam. Een check aan de keukentafel met mijn dochter geeft hetzelfde resultaat: met vier toetsmomenten per week draait de planning om de toetsen. Mijn dochter: 'Ik ga van toets naar toets, want dat bepaalt straks of ik overga.'

'Ik ga cijferloos'

In mijn dakpan brugklas vmbo-tl/havo besluit ik het roer om te gooien. De rest van het jaar geef ik de klas geen cijfers meer voor toetsen. We gaan werken met leerdoelen op verschillende niveaus: vmbo-kader, vmbo-tl en havo. De doelen die je haalt geven aan naar welk niveau je aan het einde van het jaar voor het vak wiskunde kunt doorstromen. De kinderen in mijn klas zijn in een jubelstemming: geen proefwerken meer! 'Ho, dat zei ik niet: je wordt wel degelijk getoetst: jij en ik willen weten op welk niveau je zit. Dus dat moeten we wel meten!'

Met mijn teamleider spreek ik af dat ik een schaduwboekhouding bijhoud door alle toetsen van parallelklassen af te nemen en te becijferen zonder dat door te geven aan de leerlingen. *Just in case.*

Nieuwe werkwijze

Het invoeren van een nieuwe werkwijze is een proces met vallen en opstaan. Ik ben begonnen met het opschrijven van leerdoelen per paragraaf van de methode. Het wekelijks toetsen deed ik op verschillende manieren. In de loop van het jaar ben ik gaan werken met wisbordjes, ik heb quizprogramma's zoals *Go Formative*, *Socrative* en *Quizlet Live* gebruikt, en gewoon 'ouderwets' een opgave op het bord en leerlingen op papier laten uitwerken. Bijna wekelijks keek ik zo naar de vorderingen per leerling.
Al snel bleek er (niet onverwacht) een driedeling in de klas te ontstaan: de leerlingen die de stof niet hadden begrepen, de leerlingen die dat wel hadden en leerlingen die dit allemaal te simpel vonden. Dat betekende dat ik mijn toets ook moest differentiëren. Of, zoals Wiliam dat noemt, een zogenaamde *hinge point question* bedenken, waarin de verschillende niveaus gemeten kunnen worden.

Veranderingen in mijn lessen

Doordat de verschillende niveaus zichtbaarder worden, ben ik meer gaan differentiëren. Zo heb ik één lesuur in de twee weken vrijgegeven aan leerlingen om te werken aan doelen die zij nog moeten halen, op hun eigen niveau. Zij bereiden zelf hun eigen les voor. Opdrachten die ik maak, houden nu meer rekening met de verschillende niveaus. De instructie zelf is niet veranderd; wel maak ik bijvoorbeeld veel meer gebruik van lollystokjes met namen erop. Die gebruik ik om *random* leerlingen een beurt geven. Dat verhoogt de individuele aanspreekbaarheid en betrokkenheid. Het voorkomt dat ik minder vaak leerlingen een beurt geef, van wie ik al weet dat zij de uitleg hebben begrepen. Daarnaast ben ik leerlingen veel meer als leerbron voor elkaar gaan inzetten: ik kan niet dertig antwoorden tegelijk nakijken en mijn les erop laten vervolgen. Wel kan ik leerlingen werk van elkaar laten nakijken. Eerst in duo's daarna in viertallen bijvoorbeeld. Een derde verandering is dat ik veel meer gebruik maak van *exittickets*: leerlingen schrijven aan het einde van de les een vraag op, geven antwoord op een exitvraag of noteren wat ze hebben geleerd.

Maar werkt het ook?

In de klas gebeurde iets wonderbaarlijks. Er wordt, volgens mij, niet meer huiswerk gemaakt, maar er wordt wel effectiever gewerkt. Ook zie ik leerlingen meer vertrouwen krijgen. In plaats van een 4 krijgen ze feedback op wat er goed gaat en wat nog niet. Leerlingen werken aan doelen die net buiten hun bereik liggen. Voor de zwakke leerlingen betekent dit, dat ze in de beschikbare tijd niet altijd aan de verdieping toekomen. Daar staat echter tegenover dat de basis er stukken beter in zit. Aan de bovenkant geldt: leerlingen doen niet tien opgaven die ze al kunnen maar slaan hele stukken over of mogen zelfs aan het eind beginnen. Die keuzes maken ze zelf. Ik leg ze niets op. Ik stuur wel bij op 'onhandige' keuzes, want echt zelfstandig sturing aan hen overlaten is een stap te ver.

Paragraaf	Vaardigheid	Hoe scoor ik bij nakijken mijn huiswerk?	Hoe scoor ik na een echte controle?	Wat is mijn eindscore?
7.1	Handige maten ken je uit je hoofd			
7.1	Je kunt een lengte schatten en berekenen met behulp van de handige maten			
7.1	Je kunt een tijd of afstand met een verhoudingstabel uitrekenen			
7.2	Je kunt de omtrek uitrekenen als alle lengtes gegeven zijn			
7.2	Je kunt een omtrek uitrekenen als niet alle lengtes gegeven zijn			
7.3	Je kunt het omrekenschema van lengtematen goed opschrijven			
7.3	Je kunt lengtematen omrekenen			
7.4	Je kunt de oppervlakte van rechthoeken uitrekenen			
7.5	Je kunt de oppervlakte van samengestelde rechthoeken uitrekenen			
7.5	Je kunt het omrekenschema van oppervlaktematen goed opschrijven			
7.5	Je kunt oppervlaktematen omrekenen			
algemeen	Je schrijft (bijna) altijd ook je berekening goed op			
algemeen	Je schrijft (bijna) altijd de juiste eenheid achter je antwoord			
havo	Je kunt met inlijsten de oppervlakte van een rechthoekige driehoek uitrekenen			
havo	Je kunt met inlijsten de oppervlakte van een combinatiefiguur uitrekenen			
havo	Je schrijft bij inlijsten al je rekenstappen goed op			

tabel 1 Leerdoelen bij hoofdstuk 7

Items	Ik moet aan de bak (1 punt)	Ik ben er bijna (2 punten)	Dit kan ik! (3 punten)
6.1 Uit een verhaal, een tabel of afbeeldingen een formule in woorden opstellen	Uit een verhaaltje waarin de woorden en getallen gegeven zijn	Met een tabel waar ik zelf nog moet bepalen wel start-getal er gebruikt is en welke stap van één erbij hoort	Bij een (serie) plaatjes waarbij ik eerst nog moet ontdekken welke structuur/opbouw/verband er is als de serie uitbreidt

tabel 2 Leerdoelen in rubricvorm met succescriteria

Leerdoelen

Een voorbeeld van geformuleerde leerdoelen uit hoofdstuk 7 van *Moderne wiskunde* (10e editie vmbo-tl/havo) zie je in tabel 1. Het is de bedoeling dat alle leerlingen de doelen uit de basisparagrafen 7.1 tot en met 7.5 en de algemene doelen behalen. Leerlingen die meer aan kunnen of willen nemen de havo-doelen erbij. Het is een hele klus om leerdoelen goed te formuleren in leerlingentaal.

Evaluatie

Een van de problemen was dat leerlingen niet wisten wat de succescriteria waren per leerdoel: hoe weet ik wanneer ik aan het doel voldoe? In het vervolg bied ik daarom de leerdoelen aan in rubricvorm, met daarin succescriteria op verschillende niveaus. Na het eerste hoofdstuk kwam ik erachter dat ik alleen de basisvaardigheden in kaart had gebracht. Daarom heb ik in de rubric ook een 'alles door elkaar regel' en een 'inzichtregel' (de TTI uit de RTTI taxonomie) opgenomen. Wat moet een leerling behaald hebben om door te mogen? Daarvoor heb ik wegingsfactoren aangebracht in de leerdoelen. In de tool die ik gebruik (Forallrubrics), kun je percentages uitrekenen. Verder is het ook je eigen ervaring en kennis: welk doel is echt essentieel, welke komt later terug en welke pakken we bij een volgend onderwerp weer op? Het hebben van deze rubric en het inkleuren met de leerling geeft in ieder geval veel gesprekken die de leerling helpen te zien waar hij staat en wat de volgende stap moet worden.

Conclusie

Ik ben om, want ik zie veel winst in mijn leslokaal. Ik zie leerlingen die afgehaakt waren weer opkrabbelen. Leerlingen scoren op de toetsen structureel 0,5 tot 1 punt hoger dan voorheen. En dat terwijl ik de toetsen regelmatig onaangekondigd afneem!
Een nadeel is dat het mij veel tijd kost om voldoende formatief materiaal te ontwikkelen of aan te passen. Geen enkele methode die ik ken voldoet hier (voldoende) in.
Ouders misten in het begin de cijfers. Daarom hebben we afgesproken op het rapport een 5, een 6 of een 8 neer te zetten in de zin van onvoldoende, voldoende, goed. Dat bleek voor ouders voldoende. Leerlingen hadden veel meer zicht op hun leerprestaties, en dat kwam goed van pas in gesprekken met ouders: je hebt veel meer zichtbare informatie om te delen en te bespreken. De leerlingen waren bijna allemaal positief. Een van hen zei: 'Iets wat ik niet snapte, snap ik nu wel en dan kan ik dat laten zien.' Een paar hele goede leerlingen baalden een beetje dat ze geen negens of tienen meer haalden.
Differentiëren en uitdagen is niet voorbehouden aan havo- en vwo-leerlingen. Ook de vmbo-leerling kun je op zijn niveau van wiskunde uitdagen. De truc is om de wiskunde binnen bereik te brengen. Laat leerlingen ervaren wat ze al kunnen, laat ze zien wat de volgende stap in hun ontwikkeling kan zijn en help hen daar te komen. Daar zijn geen cijfers voor nodig. Wel aandacht en groei.

 *www.vakbladeuclides.nl/935remoortere*
Op de site vind je de volledige rubric bij een hoofdstuk uit *Moderne wiskunde* en een planningsinstrument.

Noten

[1] Met collega's van De Leidse aanpak voor talentontwikkeling volgde ik een congres. Voor meer informatie: *http://deleidseaanpak.nl/*
[2] William, D. (2013). *Cijfers geven werkt niet.* Meppel: Ten Brink uitgevers.
[3] Ook Alfie Kohn heeft geschreven over cijferloos lesgeven. Kohn, *http://www.alfiekohn.org/article/case-grades/*

Over de auteur

Jörgen van Remoortere heeft de afgelopen jaren, tijdens de duur van dit cijferloze project lesgegeven aan het Visser 't Hooft Lyceum te Leiden. Nu geeft hij les aan het Ashram College in Alphen aan den Rijn, waar alle brugklassen sinds dit jaar ook zonder cijfers werken. In 2016 heeft hij met twee anderen de facebookgroep *Actief leren zonder cijfers* opgericht, die momenteel ruim 6400 leden telt.

WORTELS VAN DE WISKUNDE:

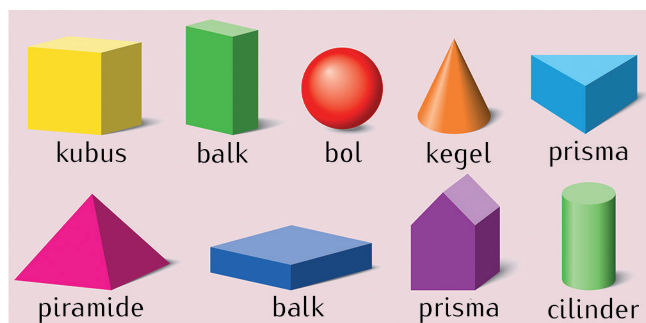
9: INHOUD VAN EEN (AFGEKNOTTE) PIRAMIDE

Desiree van den Bogaart

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: de inhoud van een (afgeknotte) piramide.



Het eerste hoofdstuk van het brugklasboek van de meeste wiskundemethodes gaat over ruimtemeetkunde. Leerlingen leren namen en eigenschappen van kubus, balk, bol, kegel, prisma, piramide en cilinder, zie figuur 1. Het doen van berekeningen aan deze ruimtefiguren komt meestal later, of blijft beperkt tot kubus en balk.



figuur 1

Michel Roelens, collega-lerarenopleider uit België, heeft een aantal mooie artikelen, die ook deels online te vinden zijn, gepubliceerd over het berekenen van de inhoud van een piramide in de loop van de geschiedenis. Een citaat uit zijn artikel in de *Nieuwe Wiskrant* (2009):

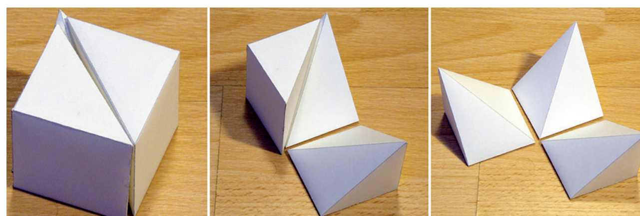
> *Het begrip 'volume' lijkt er altijd geweest te zijn, net zoals de begrippen 'getal', 'functie', 'oppervlakte'... Toch is dit niet het geval, althans niet in de vorm die wij nu kennen. Deze begrippen hebben een hele evolutie gekend. Wijzelf, en zeker onze leerlingen, bekijken oppervlakten en volumes als maatgetallen die je kunt uitrekenen door de afmetingen van de figuur in te vullen in bepaalde formules. Zo bekeken de oude Grieken het niet. Zij vergeleken altijd twee oppervlakten of twee volumes. Bovendien bekeken ze de figuren zelf als grootheden: ze schreven 'de oppervlakte van' of het 'volume van' er nooit bij. Ze zeiden bijvoorbeeld: 'Twee piramides met gelijke grondvlakken verhouden zich tot elkaar zoals hun hoogtes.*

Verhoudingen

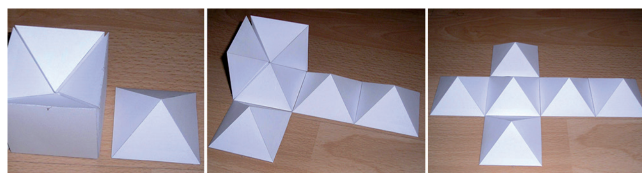
Het kan mooie gesprekken met leerlingen opleveren om eens op deze manier naar de inhoud van de ruimtefiguren te kijken. Welke inhoud is groter? Hoe verhouden ze zich tot elkaar? Vergelijk bijvoorbeeld de inhoud van een balk met die van een driehoekig prisma met gelijke hoogte, waarvan het grondvlak de helft is van het grondvlak van de balk. Hoe zit dat met een piramide en een balk met gelijk grondvlak en gelijke hoogte? Het feit dat de inhoud van een piramide berekend wordt met de formule

$$I=\tfrac{1}{3}\times G\times h$$

(met G = oppervlakte grondvlak en h = hoogte) kan voor enkele speciale gevallen worden aangetoond met concrete materialen. Bijvoorbeeld een piramide met vierkant grondvlak, hoogte gelijk aan de zijde van het grondvlak en top boven een van de hoekpunten. Drie exemplaren van deze piramide bij elkaar vormen precies een kubus, zie figuur 2.



figuur 2 Drie piramides vormen een kubus



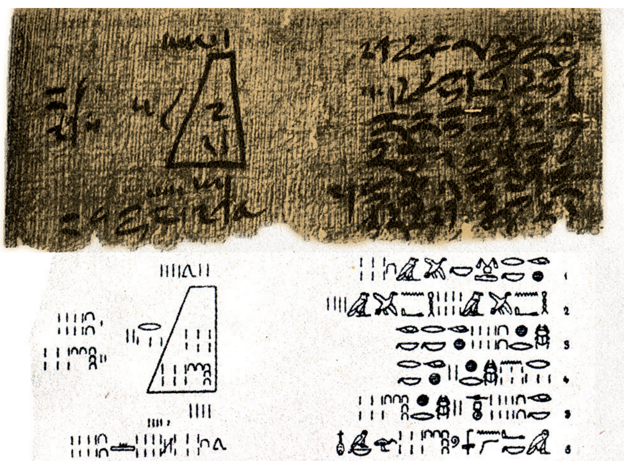
figuur 3 Zes piramides vormen een kubus

Iets dergelijks werkt ook voor een piramide met een vierkant grondvlak, waarvan de hoogte gelijk is aan de halve zijde van het grondvlak en de top midden boven het grondvlak ligt, zie figuur 3. Het feit dat je hier zes

exemplaren nodig hebt om een complete kubus te maken, komt doordat de hoogte de halve zijde is. Zes keer een piramide met halve hoogte is gelijk aan drie keer een piramide met dezelfde hoogte.
In de categorie bewijzen op tussenniveau kan ook een piramide drie keer gevuld worden met water of zand en vervolgens leeg gegoten worden in een prisma met grondvlak en hoogte gelijk aan die van de piramide. Het feit dat het prisma dan precies tot de rand gevuld is, ondersteunt de onderlinge verhouding 1 : 3 tussen de inhoud van beide ruimtefiguren.

De oude Egyptenaren

Het is niet verwonderlijk dat in de wiskundige geschriften van de oude Egyptenaren juist wel concrete berekeningen zijn gevonden voor de inhoud van de piramide. Het praktische nut hiervan lijkt voor de hand te liggen: het berekenen van de hoeveelheid materiaal die nodig is om hun beroemde piramides te bouwen. De zogenaamde *Moskou Papyrus*, die samen met de *Papyrus Rhind* de belangrijkste bron vormt voor onze kennis over de Egyptische wiskunde uit de periode rond 1800 voor Christus, bevat 25 problemen, waarvan nummer 14 over de inhoud van een afgeknotte piramide gaat.



figuur 4 Moskou Papyrus, opgave 14

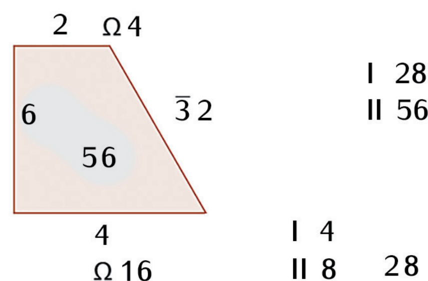
Figuur 4 toont een stuk van de originele Moskou Papyrus, in het hiëratische schrift, met daaronder een vertaling in hiërogliefen. Het Egyptische getalsysteem met hiërogliefen is niet heel ingewikkeld, het is een tientallig stelsel. In figuur 5 staat de betekenis van dit schrift.

Als je leerlingen met de Moskou Papyrus laat puzzelen, zullen ze de meeste tekens linksonder kunnen vertalen naar getallen en daarin berekeningen ontdekken, zoals de Egyptische werkwijze met verdubbelen. Een andere ontdekking zou kunnen zijn dat de Egyptenaren van rechts naar links lezen. (Dat deden ze overigens niet consequent, er zijn ook bronnen gevonden waarbij van

Symbool	Betekenis	Getal
𓏺	streepje	1
𓎆	hielbeen	10
𓍢	opgerold touw	100
𓆼	lotusbloem	1000
𓂭	wijzende vinger	10.000
𓆐	kikkervisje	100.000
𓁨	verbaasde man	1.000.000

figuur 5 Betekenis van de Egyptische hiëroglifische getalsymbolen

links naar rechts gelezen moet worden.) En wat is de betekenis van het ovaaltje boven een aantal streepjes? Antwoord: dat geeft aan dat hier een breuk staat. (Voor meer over het Egyptische rekenen, zie schets 1 van *Wortels van de wiskunde*.) Mocht je deze stap willen overslaan in je les, dan kun je na de originele afbeelding ook meteen figuur 6 tonen, waarin het zijaanzicht in een moderne notatie wordt weergegeven.



figuur 6 Moderne weergave zijaanzicht

We zien dus het zijaanzicht van een afgeknotte piramide met zijdes 4 en 2 en hoogte 6. Leerlingen die basale kennis hebben van gelijkvormigheid, moeten in staat zijn om de inhoud van de afgeknotte piramide met bovenstaande gegevens uit te rekenen. De hoogte van de onafgeknotte piramide zou 12 zijn geweest. Dat geeft als inhoud $\frac{1}{3}$ x 16 x 12 = 64. Hier moet dan de bovenste kleine piramide vanaf, die als inhoud $\frac{1}{3}$ x 4 x 6 = 8 heeft, waarmee voor de afgeknotte piramide 56 overblijft. Dit getal zien we ook terug in figuur 6. Maar daar zijn de Egyptenaren op een andere manier aan gekomen.

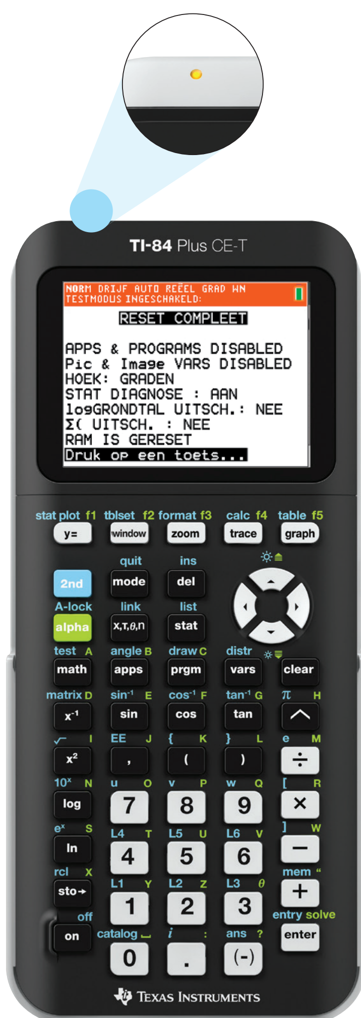
Formules

De formule voor de inhoud van een afgeknotte piramide met vierkant boven- en ondervlak luidt:

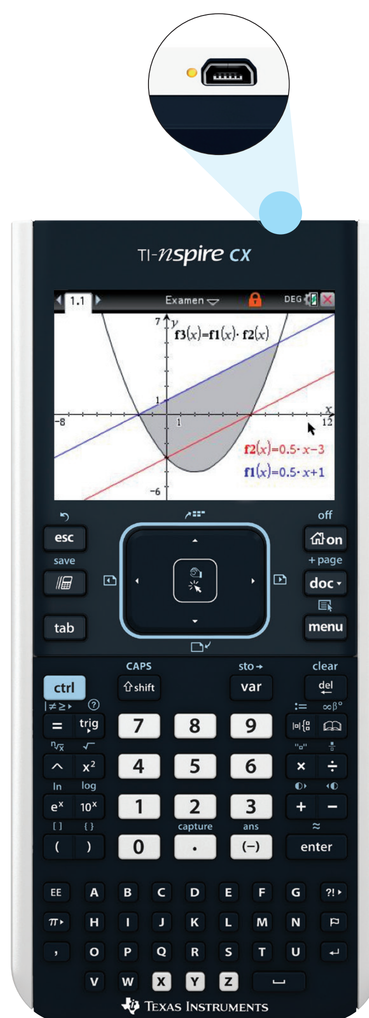
$$I = \tfrac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab)$$

Hierin is a = de zijde van het grondvlak, b = zijde van het bovenvlak en h = hoogte. Als je leerlingen met behulp van deze formule de inhoud van de gegeven piramide laat uitrekenen, zullen ze ontdekken dat in de tussenstappen

De Nederlandse examenstand. Nu beschikbaar.



TI-84 Plus CE-T

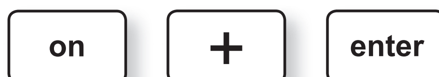


TI-Nspire CX



Alle instellingen volledig klaargezet voor het Nederlandse wiskunde-examen.

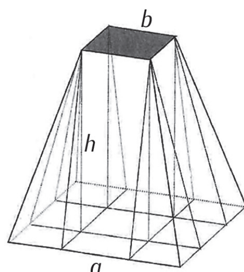
Stel de examenstand in met





education.ti.com/nederland

van hun berekeningen dezelfde getallen voorkomen als in figuur 6 (of figuur 4). Dat maakt dan wellicht ook duidelijk waarom sommige getallen rondom het zijaanzicht staan waar ze staan, door de rol ervan in de berekening van de inhoud. De Egyptenaren zelf beschikten uiteraard niet over de formule in deze expliciete vorm, want het noteren van formules op deze wijze is van veel later datum, maar hun rekenrecept komt wel op dezelfde kennis neer.



figuur 7 Afgeknotte piramide verdeeld in negen stukken

Liu Hui, een Chinese wiskundige die in de derde eeuw na Christus leefde, beschikte over dezelfde kennis als de Egyptenaren. Hij gaf er ook een bewijs voor, door de afgeknotte piramide te verdelen in negen stukken, zoals in figuur 7. Het is een mooie oefening in algebra voor je leerlingen uit een derde klas om aan te tonen dat dit inderdaad precies neerkomt op $I = \frac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab)$.

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Moor, E. de & Kindt, M. (2012). *Wiskunde dat kun je begrijpen*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Roelens, M. (2009). Het volume van een piramide. *Nieuwe Wiskrant*, jaargang 28, nummer 3, p. 4-10 (Online te vinden op: *http://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/283/283maart_roelens.pdf*)

Bronvermelding

- Figuur 1: *Getal & Ruimte*, deel 1 havo/vwo, 10e editie
- Figuur 2 en 3: *http://www.korthalsaltes.com/es/model.php?name_en=six%20pyramids%20that%20form%20a%20cube*
- Figuur 5: *Wortels van de wiskunde*
- Figuur 7: *Wiskunde dat kun je begrijpen*

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

HOE VERLOOPT DE INVOERING VAN WISKUNDE C?

Johan Gademan
Jos Tolboom

Het vwo wiskunde C-programma is compleet vernieuwd, maar stopt daardoor de dalende trend van het aantal leerlingen dat wiskunde C kiest? Johan Gademan en Jos Tolboom onderzoeken die trend en concluderen dat het nieuwe programma het tij niet heeft gekeerd. Wat zijn de mogelijkheden om dat alsnog te proberen?

Inleiding

Gedurende het schooljaar 2017/2018 doen leerlingen in 6 vwo voor de eerste keer wiskunde-examen volgens een nieuw examenprogramma, dat is ingevoerd in augustus 2015 in vwo 4. Voor het vak vwo wiskunde C wijkt dit programma sterk af van het oude programma vwo wiskunde C en ook van het oude en nieuwe examenprogramma wiskunde A. Voor details: zie ook de *Kenniskaart wiskunde C*,[1] en *Veranderd wiskundeonderwijs SLO*.[2]
Wat zijn de belangrijkste veranderingen? Wiskunde C is nu specifiek gericht op profiel C&M. Er zijn twee nieuwe domeinen: *Logisch Redeneren* en *Vorm en ruimte*. Daarnaast is zowel bij wiskunde A als bij wiskunde C het domein *Kansrekening & statistiek* aangepast en wordt alleen nog maar getoetst tijdens het Schoolexamen (SE), en dus niet meer tijdens het Centraal Examen (CE).

Situatie vóór invoering van het nieuwe programma

Het aantal leerlingen dat wiskunde C deed volgens het oude examenprogramma liep de afgelopen jaren al duidelijk terug, zie figuur 1.



figuur 1 De aantallen examenkandidaten vwo wiskunde C (gegevens van DUO)

Vergeleken met het aantal wiskunde A-leerlingen zag je ook een duidelijk dalend aantal wiskunde C-leerlingen:

Schooljaar	2011-12	2012-13	2013-14	2014-15	2015-16	2016-17
Wiskunde C / Wiskunde A + C	11,1%	10,3%	9,3%	7,5%	7,0%	5,8%

Het zou mooi zijn als deze dalende trend bij de invoering van het nieuwe examenprogramma gekeerd kan worden. Het oude examenprogramma wiskunde C was hierin vrijwel een deelverzameling van het examenprogramma wiskunde A.

Nieuwe examenprogramma's wiskunde A en C

Het basisidee van de nieuwe examenprogramma's is dat C&M-leerlingen wiskunde C gaan doen, en E&M- en N&G-leerlingen wiskunde A. In het nieuwe examenprogramma wiskunde A is er meer nadruk op algebraïsche vaardigheden, om de aansluiting met de studie economie en studies in levenswetenschappen te verbeteren. Het examenprogramma wiskunde C is meer afgestemd op de C&M-leerling. Dit examenprogramma legt minder nadruk op de algebraïsche vaardigheden en het heeft twee compleet nieuwe domeinen gekregen: *Logisch redeneren* en *Vorm en ruimte*.
Het domein *Kansrekening & statistiek* is voor beide programma's gelijk, en dit wordt niet meer getoetst op het Centraal Examen. Dit domein is inhoudelijk niet hetzelfde als in het oude examenprogramma. Voor de precieze inhouden is het verstandig de examenprogramma's, de handleidingen en de kenniskaarten van de SLO te raadplegen.

Vragenlijst

Er bereikten ons signalen tijdens de conferentie 'Optimaal voorbereid naar het wiskunde-examen' van 25 september 2017 dat het examenprogramma wiskunde C op lang niet elke school optimaal werd aangeboden. Dit beeld werd in het overleg met de klankbordgroep wiskunde havo/vwo bevestigd en bracht ons tot de opzet van een korte vragenlijst. Deze is uitgezet in het najaar van 2017. Via deze vragenlijst wilden we te weten komen hoe wiskunde C georganiseerd werd op de betreffende school, welke aantallen leerlingen wiskunde C volgden, tegen welke

problemen de docenten aanliepen bij de invoering en welke suggesties docenten hadden om wiskunde C te versterken. De vragenlijst is door 116 wiskundedocenten ingevuld.

Resultaten

De analyse van de 116 ingevulde vragenlijsten levert een globaal beeld van de invoering op de scholen. We hebben in de enquête bewust de mogelijkheid om de naam van de school in te vullen facultatief gehouden. Van sommige respondenten weten we dus de naam van de school niet. Het aantal scholen in 4, 5 en 6 vwo verschilt hierdoor, maar ook doordat sommige scholen alleen wiskunde C aanbieden in klas 6 of doordat de school een Vavo is. Je weet dus ook niet precies wanneer je van wiskunde C moet spreken. Deze mogelijkheid was een bewuste keuze, omdat het ons meer ging om het globale beeld, de invoeringsperikelen en de mogelijke versterkingen dan om de exacte aantallen, wetende dat je niet alle scholen bereikt met een vragenlijst.

Wat valt ons op?

1. Kleine groepjes wiskunde C

Wat vooral opvalt, is dat het aantal wiskunde C-leerlingen op 105 scholen (6 vwo) en 95 scholen (5 vwo) niet erg groot is. We spreken over gemiddeld 3 tot 4 leerlingen wiskunde C per leerjaar.

	6 vwo	5 vwo
Aantal leerlingen	360	332

Nergens zagen we meer dan tien leerlingen in 5 of 6 vwo.

Aantal leerlingen per leerjaar	6 vwo (in aantallen scholen)	5 vwo (in aantallen scholen)
0	18	23
1-5	72	56
6-10	15	15

2. Veel combigroepen met wiskunde A

We zagen veel combiklassen wiskunde A en wiskunde C in de resultaten. Voor 4 vwo maken de lesmethoden nauwelijks of geen onderscheid tussen wiskunde A en C en hierdoor zie je op sommige scholen dat de keuze voor wiskunde C pas in klas 4 en soms ook in klas 5 gemaakt wordt.

Start in klas 4	**4 vwo**	**5 vwo**	**6 vwo**
Combinatieklas	48	16	8
C-klas (soms met 5 en 6)	5	35	43
Comb en C-uren	0	7	7
Onbekend	5		
Totaal klas 4	58	58	58
Start in klas 5	**4 vwo**	**5 vwo**	**6 vwo**
Combinatieklas		17	10
C-klas (soms met 6)		19	29
Comb en C-uren		5	3
Onbekend		3	2
Totaal klas 5		44	44
Start in klas 6	**4 vwo**	**5 vwo**	**6 vwo**
Combinatieklas			5
C-klas			1
Comb en C-uren			2
Onbekend			
Totaal klas 6			8

Er zijn ook scholen die de mogelijkheid om wiskunde C te kiezen nauwelijks actief kenbaar maken.
Hierboven maken we dus onderscheid tussen scholen die in 4 vwo, 5 vwo of 6 vwo gestart zijn met wiskunde C.

Invoering wiskunde C

We hebben gevraagd waar docenten tegenaan lopen bij de invoering van wiskunde C op hun eigen school.
De volgende opmerkingen zijn door hen gemaakt.

Organisatie	Groepsgrootte(aantal leerlingen)	67
	Contacturen	8
	Geld/middelen	5
Voorlichting	Onbekendheid	12
	Doorstroming WO	12
	(nut/doel wiskunde C)	
Inhoud	Examenprogramma	11
	(te) moeilijk voor leerlingen	4
Didactiek	Te weinig aandacht voor leerlingen	3
	Veel voorbereiding	1

Versterking wiskunde C

Daarnaast stelden we de docenten de vraag: Hoe kan de positie van wiskunde C versterkt worden?

Mogelijke oplossingen genoemd in de vragenlijst:

Aspect	Suggestie	Aantal keren genoemd
Organisatie	Meer aandacht op school (rooster, aantal lesuren, schoolleiding)	5
	Geen CE	2
	Ook bij andere profielen	6
Voorlichting	Op scholen zelf	21
	Zingeving vanuit wo aangeven (erkenning, acceptatie, status, etc)	35
Inhoud	Meer overlap Wiskunde A	5
	Andere inhoud	7
	Beter lesmateriaal	1
Anders	Weet niet/geen idee	12
	Afschaffen	8
	Niet versterken	5

En nu?

Een breed pakket aan acties wordt nu overwogen, vooral in de sfeer van voorlichting.

- voorlichting aan docenten, decanen en schoolleiders;
- voorlichting aan ouders/leerlingen;
- voorlichting aan het wetenschappelijk onderwijs.

Belangrijk is de zingeving voor het vak wiskunde C en met name het opnemen van wiskunde C in de doorstroommogelijkheden naar het wo. In de huidige beeldvorming lijkt wiskunde C een eindstation. In doorstroming naar het wo worden alleen wiskunde A en B in de zogenaamde kruisjeslijst genoemd. Maar de sectoren Recht, Taal en Cultuur en Gedrag en Maatschappij worden door wiskunde C inhoudelijk beter bediend dan door wiskunde A. Naar aanleiding van ons onderzoek zijn we uitgenodigd op een vergadering van het VSNU Netwerk aansluiting vwo-wo. In deze vergadering is geopperd om de kruisjeslijst met vwo wiskunde C te verrijken; dit zou betekenen dat wiskunde C in ieder geval genoemd gaat worden in de doorstroming van vwo naar wo. Deze aangepaste lijst zal per 1-8-2018 moeten verschijnen.

Daarnaast is er een flyer gemaakt voor leerlingen, docenten, decanen en schoolleiders om de keuze tussen wiskunde A en wiskunde C voor C&M-leerlingen te verduidelijken.[3] De keuze voor wiskunde A is relevant als je economie hebt gekozen in je profiel C&M en de doorstroming naar een economische studie wilt openhouden. De keuze voor wiskunde C is relevant als je vooral talen en cultuurvakken hebt gekozen en je een vervolgstudie in die richting zoekt.
Op maandag 16 april zal een conferentie worden gehouden onder de titel 'Hallo wo, hier vwo' in navolging van de succesvolle conferentie 'Hallo hbo, hier havo'. [3]
Op deze conferentie zal de nadruk komen te liggen op de nieuwe domeinen *Logisch redeneren* en *Vorm en Ruimte* en het vernieuwde statistiekprogramma.
De conferentie is met name bedoeld voor vwo-docenten en voor wo-docenten die geïnteresseerd zijn in de aansluiting vo-wo. Voor het wo richten we ons vooral op de alfa- en gammastudies, omdat daar de wiskunde A- en wiskunde C-leerlingen veelal instromen.

Globale boodschap

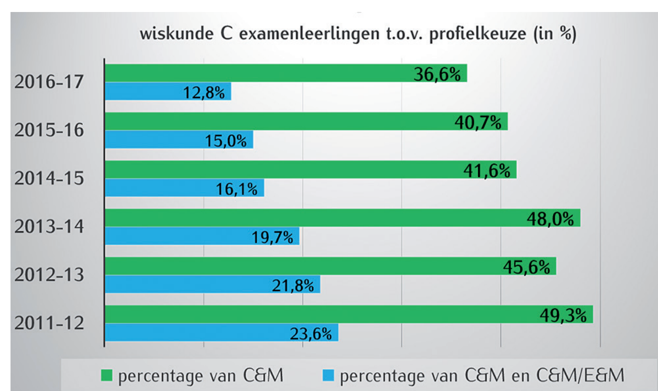
Te weinig leerlingen in het vwo kiezen wiskunde C, waardoor groepen worden geclusterd om financiële of roostertechnische redenen, met als gevolg dat zowel de inhoud als de leerling te weinig aandacht krijgt, vaak tot in 6 vwo.
Bovendien zijn scholen soms te klein om drie (laat staan vier, als wiskunde D ook wordt meegeteld) soorten wiskunde aan te bieden.

Door docenten worden de volgende oorzaken voor tegenvallende leerlingaantallen genoemd:

- nut/doel vak, wat kun je er mee na vo?
- gebrekkige voorlichting
- inhoudelijk een lastig vak

Discussie

Kijkend naar de aantallen vwo-leerlingen en met name binnen het M-profiel, zie je ook een duidelijke trend.



figuur 2 Wiskunde C examenleerlingen t.o.v. profielkeuze (gegevens van DUO)

	2011-12	2012-13	2013-14	2014-15	2015-16	2016-17
Totaal	36755	35733	35450	35946	35838	37905
M-profiel	16837 (45,8%)|	16266 (45,5%)	16165 (45,6%)	15718 (43,7%)	15254 (42,6%)	15206 (40,1%)
C&M	4369 (11,9%)	4143 (11,6%)	3755 (10,6%)	3462 (9,6%)	3218 (9,0%)	2986 (7,9%)
E&M	7694 (20,9%)	7492 (21,0%)	6986 (19,7%)	6750 (18,8%)	6552 (18,3%)	6647 (17,5%)
C&M/E&M	4774 (13,0%)	4631 (13,0%)	5424 (15,3%)	5506 (15,3%)	5484 (15,3%)	5573 (14,7%)

Duidelijk is dat er steeds minder leerlingen een uitgesproken C&M-profiel kiezen. Maar binnen de doelgroep C&M en C&M/E&M valt er nog wel wat winst te behalen voor wiskunde C.

In 2016-17 deed 12,8% van de leerlingen die een C&M- of C&M / E&M profiel volgde examen in wiskunde C.

En 36,6% van leerlingen die een C&M-profiel volgde, deed examen in wiskunde C, zie figuur 2.
Er is dus voor wiskunde C duidelijk nog winst te behalen. Maar de vraag die sommige docenten in de vragenlijst stellen of wiskunde C wel een gezond vak zou kunnen worden binnen het profiel C&M, lijkt zonder verdere maatregelen op dit moment gerechtvaardigd.

	2011-12	2012-13	2013-14	2014-15	2015-16	2016-17
Wiskunde C	2155	1993	1804	1441	1309	1094
% van C&M en C&M/E&M	23,6%	21,8%	19,7%	16,1%	15,0%	12,8%
% van C&M	49,3%	45,6%	48,0%	41,6%	40,7%	36,6%

Noten

[1] Kenniskaart wiskunde C vwo, *http://www.betanova.nl/downloads/Wiskunde_C_kenniskaart.pdf/*
[2] Veranderd wiskundeonderwijs, *http://downloads.slo.nl/Repository/veranderd-wiskundeonderwijs.pdf*
[3] Zie *http://rekenenwiskunde.slo.nl/wiskunde-c-vwo*

Over de auteurs

Johan Gademan is onafhankelijk deskundige in het domein rekenen en wiskunde. Hij was daarnaast betrokken bij de ontwikkeling en landelijke invoering van het vak Natuur, Leven en Technologie (NLT).
E-mailadres: *info@johangademan.nl*
Jos Tolboom is leerplanontwikkelaar wiskunde en informatica bij SLO, het nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling. Zijn onderzoek betreft de didactiek en het curriculum van bètaonderwijs, met name voor de vakken wiskunde en informatica. De rol van ICT daarin speelt daarin vaak een belangrijke rol.
E-mailadres: *j.tolboom@slo.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

GRAFISCHE REPRESENTATIES VAN VERANDERING

Carolien Duijzer

In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut of de Freudenthal Group for research into the didactics of mathematics een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering belicht Carolien Duijzer grafische representaties van verandering in het basisonderwijs.



Interpreteren van grafieken

Het is niet altijd even eenvoudig om grafieken te interpreteren. In het bijzonder grafieken waarin een continue verandering is weergegeven, zoals temperatuur of beweging, vragen om het nodige inzicht. Denk bijvoorbeeld aan het weerbericht met daarin de temperatuur voor enkele dagen. Ook de afstand die een leerling aflegt van huis naar school kan in een grafiek worden weergegeven. Wanneer we een leerling vragen om een tijd-afstandgrafiek te tekenen van zijn of haar weg van huis naar school, moet de leerling inzicht hebben in hoe afstand kan variëren over tijd en hoe deze relatie tussen tijd en afstand grafisch kan worden weergegeven. Niet alleen het tekenen, ook het interpreteren van een tijd-afstandgrafiek is niet altijd gemakkelijk voor leerlingen. Onderzoek laat bijvoorbeeld zien dat leerlingen snel geneigd zijn te focussen op de meer opvallende figuratieve kenmerken van een grafiek. Een stijgende lijn in de grafiek kan bijvoorbeeld worden geïnterpreteerd als een tekening van een heuvel, terwijl deze stijgende lijn in werkelijkheid een toename van afstand over tijd weergeeft.[1]

Grafiek fysiek ervaren

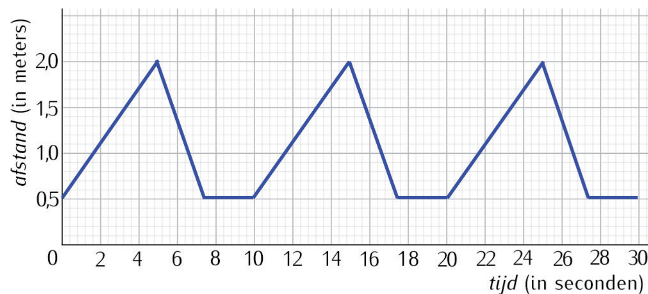
Vaardigheden zoals het redeneren over grafische representaties, het leggen van verbanden tussen de variabelen op de *x*-as en de *y*-as, zoals afstand en tijd, het construeren van grafieken, maar ook het maken van vergelijkingen tussen en binnen grafieken zijn belangrijke componenten van hogere-orde-denken. Dit zijn tevens belangrijke vaardigheden binnen veel vakken in het voortgezet onderwijs. Om een goede basis hiervoor te leggen is het belangrijk leerlingen al in het basisonderwijs kennis te laten maken met grafieken. Op deze manier leren ze redeneren over relaties tussen variabelen. Tegelijkertijd leren ze deze relaties grafisch weer te geven.
Binnen ons onderzoek in groep 7 maken we gebruik van bewegingssensoren om leerlingen aan den lijve te laten ervaren hoe tijd-afstandgrafieken ontstaan en aangepast kunnen worden. Het toepassen van dergelijke gerichte fysieke ervaringen, waarbij een sterke link wordt gelegd tussen de lichamelijke ervaring en het wiskundige concept, is gebaseerd op de 'embodied cognition' theorie. Deze theorie houdt in dat lichamelijke ervaringen worden ingezet om bepaalde (wiskundige) concepten te verankeren. Voor grafieken betekent dit dat de ervaring van het door de ruimte bewegen wordt verbonden aan de representatie van deze ervaring in een grafiek.[2]

> 'DOOR DE ERVARING VAN HET BEWEGEN VOOR DE SENSOR WORDT DE GRAFISCHE REPRESENTATIE OPEENS HEEL ECHT VOOR DE LEERLINGEN.'

Grafieken nabootsen

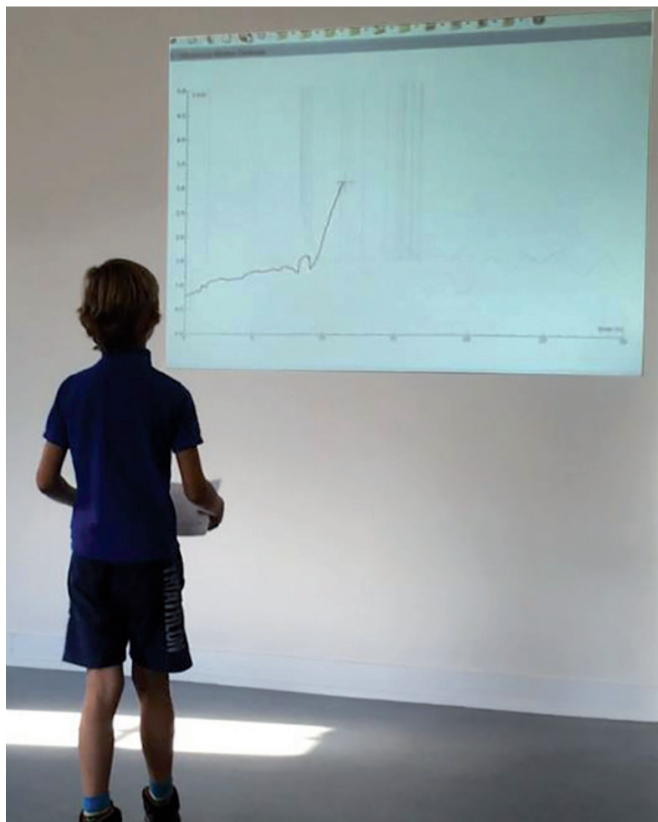
De bewegingssensor kan op verschillende manieren in de les worden toegepast. Bijvoorbeeld klassikaal, waarbij één leerling voor de sensor heen en weer beweegt. De docent kan de resulterende grafische representatie bespreken met de klas. Beter nog is om leerlingen in kleinere groepjes te laten samenwerken. Op die manier heeft elke leerling de mogelijkheid om zelf te ervaren hoe de eigen bewegingen in de grafiek worden gerepresenteerd. Een opdracht die hierbij past, is de leerlingen beschrijvingen van bewegingen te geven, zoals: 'Een persoon loopt snel naar de bewegingssensor toe, blijft even stilstaan en loopt dan langzaam bij de bewegingssensor vandaan.' Leerlingen maken eerst in hun groepje een schets van hoe zij denken dat de grafiek er uit zou kunnen zien. Vervolgens controleren ze deze door de grafiek voor de sensor te

lopen. Op die manier kunnen de leerlingen hun voorspelling (de schets) vergelijken met de grafische representatie die ontstaat tijdens het zelf nabootsen van de beschreven beweging. Zo stimuleren we de leerlingen op vrij eenvoudige wijze in het denken over hoe een beweging er in een grafiek uit zal zien. Een andere opdracht is om leerlingen een gegeven grafiek te laten reproduceren. In figuur 1 is zo'n grafiek te zien.



figuur 1 Grafiek die leerlingen moeten reproduceren

Ook hierbij moeten de leerlingen nadenken over de relatie tussen afstand en tijd. Afhankelijk van de richting, snelheid en timing van hun bewegingen zal de grafiek min of meer vergelijkbaar zijn met de gekregen grafiek.



figuur 2 Een leerling 'loopt' een grafiek

Denkproces stimuleren

Tijdens al deze activiteiten is het belangrijk dat de leerlingen de mogelijkheid krijgen om hun ideeën, verwachtingen en conclusies over de grafische representaties te verwoorden, om zo hun denkproces en redeneren te stimuleren en te verrijken. De docent kan dit bereiken door te vragen wat er op bepaalde punten in de grafiek te zien is en door ze dit aan elkaar uit te laten leggen. Kortom, door de ervaring van het bewegen voor de sensor wordt de grafische representatie opeens heel echt voor de leerlingen. Het gaat niet langer over iets abstracts, maar over iets wat ze zojuist aan den lijve hebben ervaren. De grafische representatie wordt een ruimte waarbinnen van alles mogelijk, en onmogelijk, is.

Noten

[1] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64. doi:10.3102/00346543060001001
Mokros, J. R., & Tinker, R. F. (1987). The impact of microcomputer-based labs on children's ability to interpret graphs. *Journal of Research in Science Teaching*, *24*(4), 369-383. doi:10.1002/tea.3660240408

[2] Ferrara, F. (2014). How multimodality works in mathematical activity: young children graphing motion. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12, 917-939. doi:10.1007/s10763-013-9438-4
Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and Instruction*, 16, 119–172. doi:10.1207/s1532690xci1602_1

Over de auteur

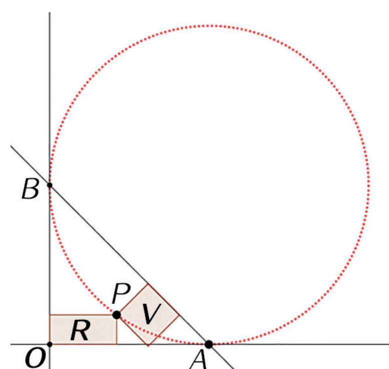
Carolien Duijzer doet promotieonderzoek bij de Freudenthal Group aan de Universiteit Utrecht naar hogere-orde-denken tijdens het leren van grafieken op de basisschool, waarbij zij gebruik maakt van ideeën uit de embodied cognition theorie. Daarnaast is zij lid van de PhD council van de faculteit Sociale Wetenschappen. E-mailadres: *A.C.G.Duijzer@uu.nl*

MET DE PAP(PUS)LEPEL...

Fred Muijrers

Kies een aantal lijnen en een punt. Stel een mooi verband op tussen de afstanden van dat punt tot die lijnen en zoek uit waar alle punten liggen waarvoor dat verband klopt. Dat is kort door de bocht de samenvatting van de lijnenproblemen van Pappus. Fred Muijrers lost in dit artikel een aantal van die problemen op met hulp van Descartes en Wikipedia.

Een les starten met een *sangaku* geeft altijd aanleiding tot denkactiviteiten, gelukkig vaak van wiskundige aard. Soms zetten die activiteiten aan tot verdieping, veralgemenisering of specialisatie. Het volgende voorbeeld leent zich uitstekend voor een instap in analytische meetkunde, ook dat nog, en veralgemenisering ligt voor de hand.



figuur 1

We zien in figuur 1 drie lijnen, een cirkel (?) en een rechthoek R en een vierkant V met een punt P. Zou het zo zijn dat als P op de kromme ligt, R en V gelijke oppervlakte hebben? Of als R en V gelijke oppervlakte hebben, P op de kromme ligt, die mogelijk een cirkel is? Dat laatste gaan we onderzoeken.
Een eenvoudige aanpak is die met coördinaten. Met O (0, 0), A(1, 0) en B(0, n) ligt alles vast.
In figuur 1 lijkt $|OA| = |OB|$ dus $n = 1$.
De lijnen zijn de x-as, y-as en lijn k door A en B met vergelijking $y = -x + 1$. Punt P krijgt de coördinaten (p, q).
Dan volgt: Opp(R) = $p \cdot q$; opp(V) = d$(P, k)^2$.

Dus $p \cdot q = \left(\dfrac{|p+q-1|}{\sqrt{2}}\right)^2$

Uitwerking geeft: $(p-1)^2 + (q-1)^2 = 1$. Zo'n punt P ligt inderdaad op een cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Een leuk resultaat.

Het is wel een erg bijzonder geval. Door n te variëren, dus lijn k te variëren, wordt het al wat ingewikkelder. Met B(0, n) wordt de vergelijking van lijn k: $y = -n \cdot x + n$.

Dan volgt: $p \cdot q = \left(\dfrac{|p \cdot n + q - n|}{\sqrt{(n^2+1)}}\right)^2$ Uitwerking geeft:

$$n^2p^2 - 2n^2p - (n-1)^2 pq - 2nq + q^2 + n^2 = 0$$

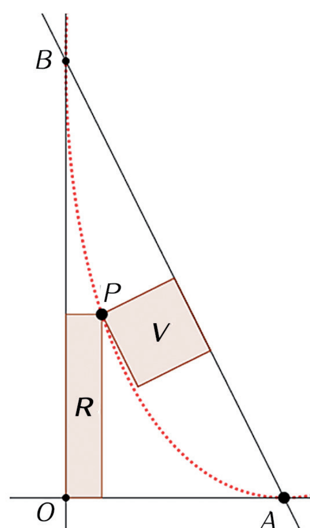
Een kwadratische uitdrukking in p en q. Punt P ligt blijkbaar op een kegelsnede met vergelijking

$$n^2x^2 - 2n^2x - (n-1)^2 xy - 2ny + y^2 + n^2 = 0$$

Voor $n \neq 1$ valt de term met xy niet weg. De vraag is nu bijvoorbeeld voor $n = 2$: welke kegelsnede heeft de vergelijking:

$$4x^2 - 8x - xy - 4y + y^2 + 4 = 0$$

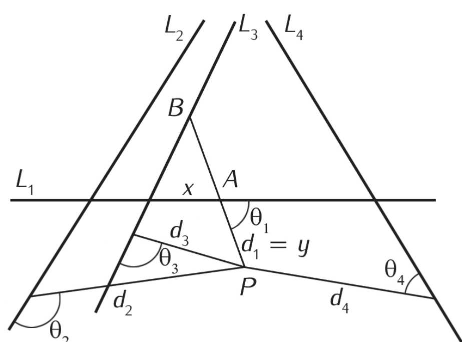
Met *GeoGebra* is de grafiek zo gemaakt, zie figuur 2.



figuur 2

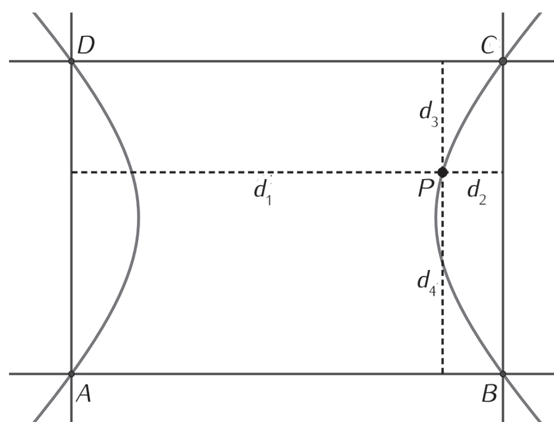
Sommige lezers herkennen hierin een drielijnenprobleem van Pappus.[1] Twee lijnen staan in het voorbeeld loodrecht

op elkaar, een bijzonder geval. En ik gebruik de afstand van P tot die drie lijnen. Dat rekent gemakkelijk maar is wel weer een speciale situatie. Meer algemeen kan het gaan om andere liggingen, andere hoeken en meer lijnen. Zie figuur 3.[2] Hier is sprake van vier lijnen (L_i), hoeken θ_i, lijnstukken d_i en punten P zodanig gelegen dat $d_1 d_2 = m \cdot d_3 d_4$. Getal m is een constante, eventueel $m = 1$. Gaat u maar fijn aan de slag...



figuur 3

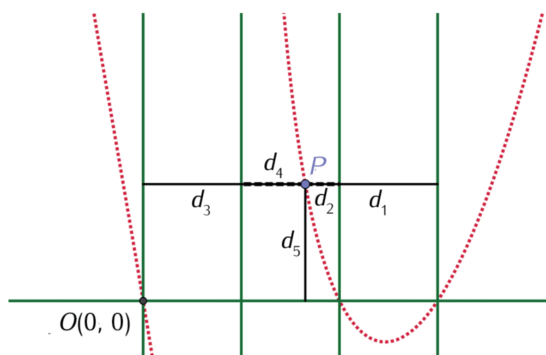
Van deze lijnproblemen zijn er dus meer. Bij bijzondere liggingen is de aanpak erg overzichtelijk. Zie figuur 4 voor een geval van een vierlijnprobleem. We zoeken nu de kromme waarop een punt P ligt waarvoor geldt: $d_1 d_2 = d_3 d_4$.



figuur 4

Descartes[2] pakt de lijnproblemen van Pappus op en past zijn analytisch meetkundige aanpak toe voor vijf en zes lijnen. Nu zouden we alle situaties gemakkelijk aankunnen, is wat te stellig, maar Descartes werd niet gehinderd door bescheidenheid. Bij een vijflijnenprobleem kunnen al verrassende krommen ontstaan.
d_i is de afstand tot lijn L_i. Kies vier lijnen evenwijdig op afstand a van elkaar, de vijfde lijn daar loodrecht op, zie figuur 5. Er geldt $d_1 d_2 d_3 = a \cdot d_4 d_5$. Nu ontstaan er geen kwadratische uitdrukkingen meer. Bij deze figuur en een handige keuze x-y-as ligt P op de kromme met vergelijking

$$(3a - x) \cdot (2a - x) \cdot x = a \cdot (x - a) \cdot y$$



figuur 5

$d_1 d_2 d_4 = a \cdot d_3 d_5$ geeft weer een andere kromme. Varieer naar hartenlust: prachtig onderzoek.
Terug naar het startprobleem met figuur 2. We hebben een vergelijking van een kegelsnede, maar welke is het? Dick Klingens[3] geeft antwoord en ook Wikipedia helpt hierbij. De algemene vergelijking van een kegelsnede is:

$$ax^2 + bx + cxy + dy + ey^2 + f = 0$$

Onderzoek door bijvoorbeeld projectief te kijken leert dat a, c en e bepalend zijn voor de typering.
Met $D = c^2 - 4 \cdot a \cdot e$ (discriminant van $aZ^2 + cZ + e = 0$) krijgen we:
$D < 0$: ellips, een cirkel als $a = e$; $D = 0$: parabool;
$D > 0$: hyperbool.
Bij het voorbeeld met $n = 2$ krijgen we een ellips, geen cirkel. Voor welke waarde(n) van n ligt P op een parabool? Lijn k evenwijdig aan een van de andere lijnen: geeft dat nog iets bijzonders? En wat is het gevolg als je in plaats van rechte hoeken andere (eventueel wel gelijke) hoeken gebruikt? Genoeg om uit te zoeken voor de lezer.

Noten

[1] Pappus van Alexandrië (c. 290 – c. 350 AD).
[2] De tekening komt uit de monografie van Bos, H.J.M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness.* Berlijn: Springer. In hoofdstuk 23 volgt een uitvoerige behandeling van de lijnproblemen. Zie ook *La Géométrie* van Descartes (1637), vertaald door Wilhelm, W. (2009). *Meetkunde.* Delft: Eburon.
[3] Zie zijn website *http://www.pandd.demon.nl/* sub kegelsneden.

Over de auteur

Fred Muijrers is docent aan de lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Tevens is hij coördinator van de eerstegraadsopleiding tot leraar wiskunde van de HAN masterprogramma's.
E-mailadres: *fred.muijrers@han.nl*

DOCENTENONTWIKKELTEAM WISKUNDIGE DENKACTIVITEITEN

Saskia van Boven
Ton Konings

Een belangrijk onderdeel in het vernieuwde curriculum van havo en vwo zijn wiskundige denkactiviteiten. Vanaf 2013 is in een *docentenontwikkelteam* (DOT) met een bezetting van zeven tot twaalf docenten en twee begeleiders samengewerkt om wiskundige denkactiviteiten vorm te geven in de klas. In dit artikel beschrijven Saskia van Boven en Ton Konings de werkwijze van het DOT en verwijzen zij naar een aantal ontwikkelde producten.

Opzet DOT

In het DOT ontwerpen docenten lessen in tien bijeenkomsten van vier uur. Zij worden daarbij begeleid door twee vakdidactici van de Radboud Docenten Academie (Nijmegen). Aan het team doen docenten mee die al ruim dertig jaar voor de klas staan, maar ook startende docenten. De docenten komen van verschillende scholen uit de regio, in een enkel geval betreft het twee docenten van eenzelfde school. Dat de docenten van verschillende scholen komen heeft als voordeel dat er vrijuit kan worden gesproken over moeilijkheden die docenten ervaren binnen de eigen school of de eigen sectie.

Lesmethode loslaten

Deelnemers aan de DOT hebben de behoefte om over hun onderwijs na te denken en om daarover met vakgenoten van gedachten te wisselen. In sectievergaderingen in scholen wordt vaak weinig aandacht besteed aan (vak)didactiek. Vaak gaan vergaderingen op aan organisatorische zaken en werkverdelingskwesties, zoals wie welke toets maakt. De planning van de leerstof komt ook wel aan de orde, maar meestal wordt daarbij vanuit de lesmethode gedacht en minder vanuit leerdoelen en wiskundige concepten.

In de DOT-bijeenkomsten wordt veel aandacht besteed aan vakdidactische thema's en het ontwikkelen van een visie op wiskundeonderwijs. De begeleiders dragen materiaal en literatuur aan[1] en stimuleren de docenten om de lesmethode los te laten en alternatieven te bedenken die meer recht doen aan het leren van leerlingen. Ze worden aangespoord om zelf (vak)didactische keuzes te maken in plaats van de lesmethode te volgen. Dit is voor veel docenten onontgonnen terrein en dat maakt veel discussie los.

De ontwikkelde lessen worden uitgevoerd en opgenomen op video. Vervolgens worden de ervaringen in het DOT met elkaar gedeeld. In sommige gevallen is een van de DOT-begeleiders aanwezig bij een les (met een videocamera). Er volgt een (gezamenlijke) evaluatie van ontwerp en uitvoering, waarna de les zo nodig wordt aangepast en zo mogelijk opnieuw uitgevoerd. We doorlopen zo in het DOT (herhaaldelijk) de ontwerpcyclus.

DEELNEMER DOT: 'IK ERVAAR DIT ALS EEN SOORT TWEEDE JEUGD IN HET WISKUNDEONDERWIJS.'



Wiskundige denkactiviteiten. Illustratie: Agnes Loonstra

Uit de dagelijkse routine

Wat levert deze aanpak op? Deelnemers geven aan weer na te denken over hun vak. Waarom doe ik de dingen op deze manier? Is dit de beste aanpak voor mijn leerlingen? Hoe zou ik die aanpak kunnen verbeteren? In de bijeenkomsten wordt over deze thema's gesproken en docenten ervaren dit als inspirerend. Ze komen uit hun dagelijkse routines en durven hun werkwijze ter discussie te stellen en te gaan experimenteren.

De grootste eyeopener voor mij was dat je het gewoon moet doen. Je moet niet bang zijn om een stap in het duister te zetten, anders blijf je ronddraaien in een kringetje.
Arno Theune, Pax Christi College, Druten

Het is voor de deelnemers prettig om te merken dat ook andere ervaren docenten dit niet altijd gemakkelijk vinden, maar dat het gezamenlijk optrekken in het DOT met vallen en opstaan zorgt voor andere lesaanpakken. Er is moed voor nodig om routines die goed werken los te laten om te onderzoeken of een andere lesaanpak tot betere resultaten leidt.

De DOT wiskundige denkactiviteiten heeft mij, van iemand die zich toch wel met handen en voeten gebonden voelde in het curriculum van het eindexamen, opnieuw de docent gemaakt die plezier heeft in het voorbereiden van lessen, die behalve een leuk, ook een beter leerrendement opbrengen. Alles bij elkaar ervaar ik dit als een soort van tweede jeugd in het wiskundeonderwijs.'
Henk Gijsbers, Nijmeegse Scholengemeenschap Groenewoud, Nijmegen

Opbrengst en producten

De winst zit 'm in het vinden van opdracht- en werkvormen om leerlingen te activeren tot denkactiviteiten. Het blijft een uitdaging leerlingen aan te zetten tot reflectie. Omdat deelnemers persoonlijke ontwikkeldoelen stellen zijn de inspanningen in de DOT gericht op de persoonlijke professionele ontwikkeling van de deelnemers en niet zozeer op het delen van die kennis. Het lesmateriaal is niet per se ontwikkeld om te delen, het is eerder een middel dan een doel. Dat neemt niet weg dat er juweeltjes langskomen. Een paar daarvan hebben we zodanig bewerkt dat ze voor een breed publiek toegankelijk zijn en vrijwel ongewijzigd gebruikt kunnen worden door collega's in den lande.

De onderwerpen zijn:
de grafiek van een functie koppelen aan de grafiek van de
- afgeleide, bovenbouw vwo-A , B, havo -B
- sinusregel en cosinusregel ontdekken en toepassen, bovenbouw vwo-B, havo-B
- kwartetten met de afgeleide, bovenbouw vwo A, B, havo-B

Je kunt ze vinden op de site van de Radboud Docenten Academie:
http://www.ru.nl/docentenacademie/nascholing/aanbod-per-schoolvak/wiskunde/lesmateriaal/2017-wiskundige-denkactiviteiten/

Hoe verder?

Het wiskunde-DOT is in 2017-2018 verdergegaan met tien deelnemers, van wie er zeven al één of meerdere jaren hebben meegedaan. Dit jaar is er naast de ontwikkeling van lesmateriaal ook aandacht voor de interactie tussen docent en leerlingen en tussen leerlingen onderling in klassengesprekken. Voor meer informatie over de resultaten van de DOTs van de afgelopen jaren en actuele nascholingsactiviteiten van de Radboud Docentenacademie, kijk op *ru.nl/docentenacademie/nascholing.*

Noot

[1] Literatuur over WDA:
- Bor-de Vries, M & Drijvers P. (2015). *Handreiking denkactiverende wiskundelessen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Windels, B. (2012). Het 6E-model. Een richtsnoer voor zelfontdekkend wiskundeonderwijs met sterke sturing. *Nieuwe Wiskrant, 32*(2).
- Drijvers, P., Streun, A. van & Zwaneveld, B. (Red.) (2012). *Handboek Wiskundedidactiek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Dit artikel is met enigszins andere inhoud ook verschenen in *Didactief*.

Over de auteurs

Saskia van Boven (Radboud Docenten Academie) en Ton Konings (HAN) waren in 2016-2017 beiden werkzaam als vakdidacticus aan de lerarenopleiding. Ton is vanaf juli 2017 gepensioneerd.
E-mailadressen: *s.vanboven@docentenacademie.ru.nl* en *tonkoningsaijm@gmail.com*

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

WIJ VAN DE HBS

Onlangs verscheen het boek *Wij van de hbs. Terug naar de beste school van Nederland.* In dat boek staan wiskunde eindexamenopgaven die de hbs'ers blijkbaar konden maken. Kunnen onze vwo-leerlingen opgaven van de Latijnse school en hbs oplossen met behulp van de (grafische) middelen en kennis van nu? Jacques Jansen zoekt dat uit.

Overigens ... ik ken nu nog de gezongen wet van wiskunde-kuipers uit mijn hoofd:

Als een hoek van 30 graden op
Een rechthoekzijde staat,
Is die rechthoekzijde halve schuine zijde
En die andere zijde die
Is een half wortel drie.
Doch bedenk wel wie de grootste is van beide.

Generaties leerlingen moesten deze meetkundestelling hardop zingen.
Herinnering van Mart Smeets (Uit: *Wij van de hbs*)

Latijnse school

In het kader lees je een herinnering van sportjournalist Mart Smeets. Het dateert uit de tijd van de heerlijke hbs-jaren. Maar wat voor school was de hbs eigenlijk? We gaan terug in de tijd naar het bijzondere jaar 1863. Op mijn cursus vormgeving werkt ene Ad, hij is de tachtig ruim gepasseerd en is oud-Natlab medewerker in Eindhoven. Zijn overgrootvader was wiskundedocent. Deze Jacob van der Hoeven, geboren in 1829, was tot zijn overlijden leraar wiskunde aan de Latijnse school in Bergen op Zoom. De Latijnse school was de belangrijkste voorloper van het gymnasium. Hij was een zeer actief lid van het Wiskundig Genootschap en bedacht voor een tijdschrift wiskundeopgaven.
Zie de volgende opgaven, gepubliceerd in 1863.

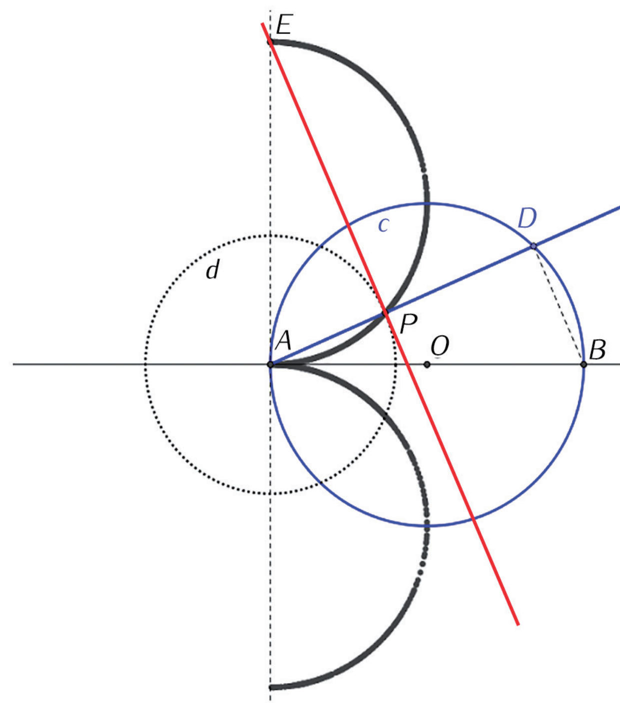
44. Uit het uiteinde A der middellijn AB van een' cirkel trekt men eene koorde AD, en maakt het stuk AP op die koorde gelijk aan den afstand BD. Men vraagt de meetkunstige plaats van het punt P te bepalen.

J. VAN DER HOEVEN.

Uitwerking opgave 44 (J. van der Hoeven)

Goed lezen en een schetsje maken, en misschien zie je de oplossing meteen. We willen natuurlijk ook een bewijs.

Wij gaan ons eerst oriënteren met behulp van GeoGebra, zie figuur 1.
We tekenen een (eenheids)cirkel c met O als middelpunt en met een middellijn AB.
We nemen een variabel punt D op de cirkel c en trekken halflijn AD.
Vervolgens tekenen we een hulpcirkel d met A als middelpunt en met een straal die even groot is als lijnstuk BD. Het snijpunt van die cirkel met halflijn AD noemen we P.
We zetten in punt P het spoor aan en verplaatsen punt D op de cirkel c.
We tekenen een lijn door punt A die loodrecht staat op lijn AB.
Zie het zwarte spoor (baan van punt P) in figuur 1.



figuur 1

Als punt D begint in punt B, valt punt P samen met punt A. We laten punt D, tegen de wijzers van de klok, cirkel c doorlopen. Als punt D in punt A is, valt punt P samen met punt E. Punt E ligt op de lijn door punt A die loodrecht staat op lijn AB waarbij $AE = AB$. Het lijkt erop dat de baan van punt P een halve cirkel is met AE als diameter. Deze halve cirkel is congruent met boog BDA. Als punt D vanuit punt B verplaatst wordt over cirkel c, met de wijzers van de klok mee, ontstaat er een baan van punt P die ook congruent is met een helft van cirkel c. Trekken we een lijn l door punt P evenwijdig met koorde DB, zie figuur 1, dan zal vermoedelijk het snijpunt E met de verticale lijn door punt A een vast punt blijken te zijn.

Te bewijzen: de meetkundige plaats van punt P bestaat uit twee halve cirkels die samen een nieuwe cirkel vormen die congruent is met gegeven cirkel c.

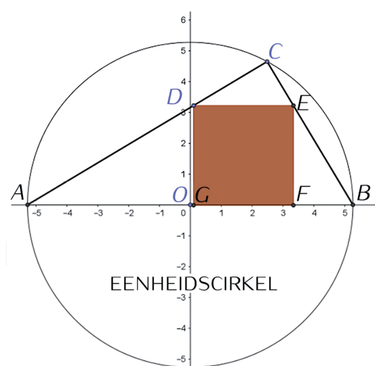
Bewijs: we trekken hulplijn l door punt P die evenwijdig is met koorde BD. Zie figuur 1.
Merk op: $\Delta EAP \cong \Delta ABD$ (zhh). Want:
$\angle EPA = \angle ADB = 90^\circ$. $AP = DB$ (gegeven).
$\angle AEP = 90^\circ - \angle EAP = \angle DAB$. Dus $AE = AB$. Uit de stelling van Thales volgt dan dat punt P een halve cirkel beschrijft met AE als diameter. Analoog voor het ontstaan van de tweede even grote halve cirkel aan de andere kant van lijn AB. De twee halve cirkels zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van gegeven lijn AB.

42. In een' regthoekigen driehoek is een vierkant beschreven, waarvan eene zijde op de hypothenuse rust. Laat men nu den driehoek beurtelings om de langste regthoekszijde en om de hypothenuse wentelen, dan brengt het vierkant in beide gevallen een omwentelings-ligchaam voort. Men vraagt het verschil tusschen de inhouden der beide ligchamen.

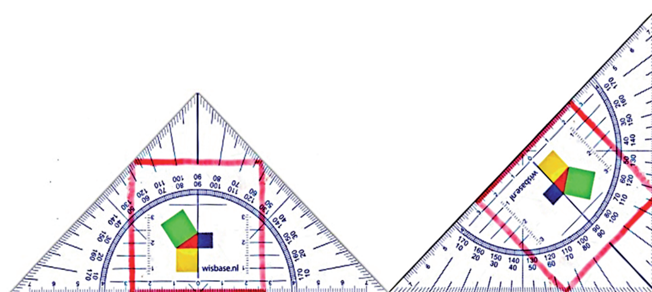
J. M. VOS, MZ.

Uitwerking opgave 42 (J.M. Vos)

We maken weer gebruik van GeoGebra. Met behulp van een eenheidscirkel tekenen we een rechthoekige driehoek waarvan de langste zijde deel is van de X-as. Met de optie 'regelmatige veelhoeken' tekenen we het gevraagde vierkant, zie figuur 2. Het is al interessant om dat vierkant te vinden. Welke afmetingen heeft dat vierkant ten opzichte van rechthoekige driehoek ABC?

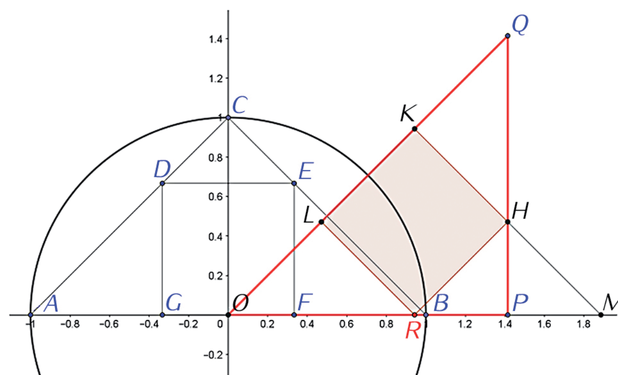


figuur 2



figuur 3

We bekijken een bijzonder geval: 'de geodriehoek', zie figuur 3. Eerst wentelen we het vierkant om de langste zijde. Vervolgens wentelen we om een rechthoekszijde. Maar hoe komen we aan het gevraagde vierkant?
Zie figuur 4. In een eenheidscirkel is gelijkbenige rechthoekige ΔABC met ingeschreven vierkant $DEFG$ getekend. Op de positieve X-as is ook getekend ΔQOP met ingeschreven vierkant $HRLK$ die congruent is met ΔABC.



figuur 4

Voor vierkant $DEFG$ geldt: $GF = EF$. We stellen $OF = x$, dan $EF = 1 - x$. $GF = 2x = 1 - x$ geeft $x = \frac{1}{3}$.
Een zijde van het vierkant is dus $\frac{2}{3}$.

Merk op dat $OK = MK = \frac{4}{3}$. Verder: $OM = \frac{4}{3}\sqrt{2}$ en $OR = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Inhoud(*vierkant* $_{\text{geroteerd schuine zijde}}$) $= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \pi = \frac{8}{27} \cdot \pi$

Inhoud(*vierkant* $_{\text{geroteerd rechthoek zijde}}$) = inhoud(*dubbelkegel*

OKM) − 2 · inhoud(*kleine dubbelkegel*) =

$$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{8}{27}\sqrt{2}\cdot\pi$$

Het scheelt dus een factor √2. Wijst dat ergens op?
Het algemene geval is een grote uitdaging. Ik ben zeer benieuwd naar jouw oplossing. En gaat dat lukken zonder te integreren? We verlaten de Latijnse school en gaan naar de hbs.

Johan Rudolph Thorbecke

Op 1 mei 1863 verdedigde Johan Rudolph Thorbecke (1798-1872) in de eerste kamer zijn Wet op het Middelbaar Onderwijs. De nieuwe wet bracht de hogere burgerschool (hbs) tot leven. Tot dusver behoorde de eerdergenoemde Latijnse school tot de top van de Nederlandse onderwijspiramide. De gemeente Groningen reageerde snel. Op 26 september 1864 konden de deuren van de eerste hbs worden geopend. Ruim honderd jaar zou dit onderwijstype blijven bestaan. Kort geleden verscheen het boek *Wij van de HBS.* [1] In dit zeker voor hbs'ers interessante boek zijn de opgaven van het herexamen uit 1963 [2] opgenomen, precies honderd jaar na de oprichting. Wij beperken ons tot de wiskunde die toen uiteenviel in algebra, stereometrie, goniometrie en analytische meetkunde. De vraag is: 'hoe zouden onze vwo-leerlingen van wiskunde B met de middelen en kennis van nu dat gaan aanpakken?'

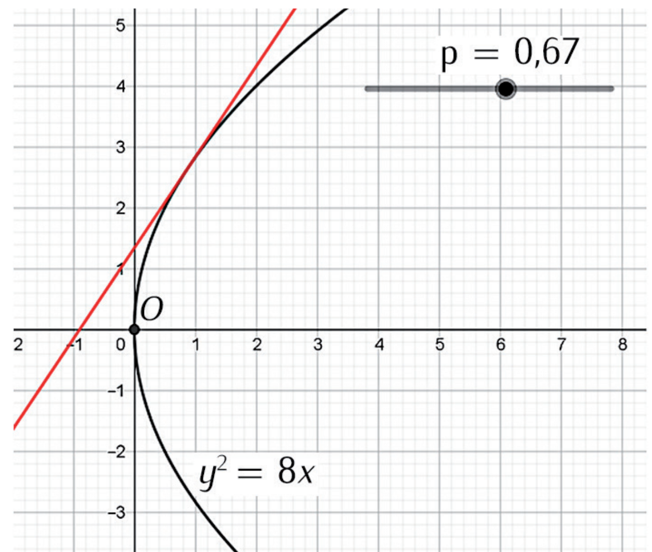


figuur 5 Johan Rudolph Thorbecke (1798-1872) maakte in 1863 de oprichting van de hbs mogelijk

Analytische meetkunde, opgave 3 (1963)
De vergelijking $x - py + 2p^2 = 0$ stelt, bij veranderlijke p, een verzameling lijnen voor.
a. Bewijs dat elke lijn van deze verzameling de parabool $y^2 = 8x$ raakt, en dat elke raaklijn van deze parabool tot de gegeven verzameling behoort.
b. Wat is de verzameling van de middens van de koorden, die de hyperbool $xy = 8$ van de tot de gegeven verzameling behorende lijnen afsnijdt? Teken deze verzameling.

Uitwerking opgave 3

De leerlingen kunnen nu GeoGebra inzetten en onder andere met behulp van een schuifknop de verzameling lijnen in beeld brengen, zie figuur 6. In deze opgave worden bij a. twee vragen gesteld, dat zal nu niet meer zo snel in een wiskunde-examen gebeuren. De leerlingen kunnen dit probleem nu op verschillende manieren oplossen. Je kunt bijvoorbeeld van de liggende parabool naar de vertrouwde staande parabool gaan en vervolgens de afgeleide gebruiken.



figuur 6

De staande parabool heeft de vergelijking $y = \frac{1}{8}x^2$ met $y' = \frac{1}{4}x$.

Nemen we een willekeurig punt $\left(q, \frac{1}{8}q^2\right)$ van de staande parabool, dan vinden we voor de vergelijking van de bijbehorende raaklijn: $y = \frac{1}{4}q \cdot x - \frac{1}{8}q^2$. Verwisselen we x en y, dan krijgen we: $x - \frac{1}{4}q \cdot y + \frac{1}{8}q^2 = 0$. Kijken we naar de gegeven verzameling $x - py + 2p^2 = 0$ en stellen we $\frac{1}{4}q$ gelijk aan p dan hebben we het beoogde resultaat.

Vanuit de analytische meetkunde bekeken kan de leerling ook het stelsel

$$\begin{cases} x - py + 2p^2 = 0 \\ y^2 - 8x = 0 \end{cases}$$

oplossen door x te elimineren en nagaan, vanwege het raken, of de discriminant gelijk is aan nul.

Vierkantsvergelijking $\frac{1}{8}y^2 - py + 2p^2 = 0$ heeft discriminant $(-p)^2 - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2p^2$ en die is inderdaad gelijk

aan 0. Maar dan moet je nog de tweede vraag van a. beantwoorden. Dat kan met eerlijk delen.
Een vergelijking van een willekeurige raaklijn aan

de parabool $y^2 = 8x$ is met eerlijk delen onmiddellijk hieruit af te leiden: van $y^2 - 8x = 0$ gaan

we naar $y \cdot y_0 - 4x - 4x_0 = 0$.

Hierbij is (x_0, y_0) een willekeurig raakpunt.

Gelet op de verzameling lijnen aangeduid met

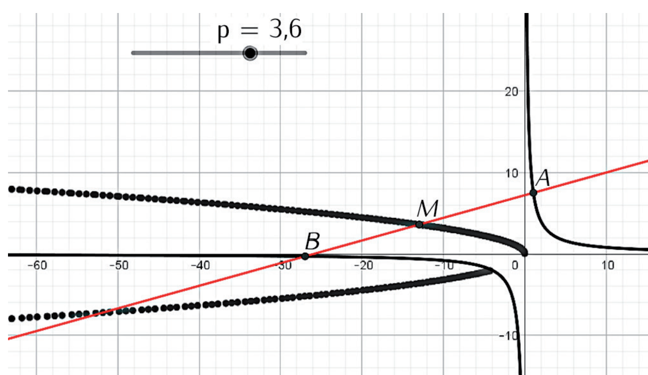
$x - py + 2p^2 = 0$ herschrijven we $y \cdot y_0 - 4x - 4x_0 = 0$

in $x - \frac{1}{4}y_0 \cdot y + x_0 = 0$. We moeten nu aantonen dat

$x_0 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}y_o\right)^2$. Echter $y_0{}^2 = 8x_0$ en na die substitutie

zie je dat het klopt.

Bij vraag 3b. is het weer interessant om te verkennen met behulp van GeoGebra, zie figuur 7.



figuur 7

De leerlingen zullen met behulp van schuifknop en spoor vermoeden dat het gaat om een liggende parabool waar een stuk als het ware uit is weggesneden. Om midden M van koorde AB te vinden, moeten we op zoek naar de snijpunten A en B door het stelsel $\begin{cases} x - py + 2p^2 = 0 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$ op te lossen. Elimineren we x dan krijgen we een kwadratische

vergelijking in y, $py^2 - 2p^2y - 8 = 0$, waarbij we eisen

dat de discriminant $4p^4 + 32p$ positief moet zijn.

Dat heeft tot gevolg dat $p \leq -2$ of $p > 0$.
Voor de y-coördinaten van de snijpunten geldt dan

$y_{1,2} = \frac{2p^2 \pm D}{2p}$. Dat betekent meteen dat $y_M = \frac{2p^2}{2p} = p$ en

via de gegeven verzameling lijnen vinden we $x_m = -p^2$.

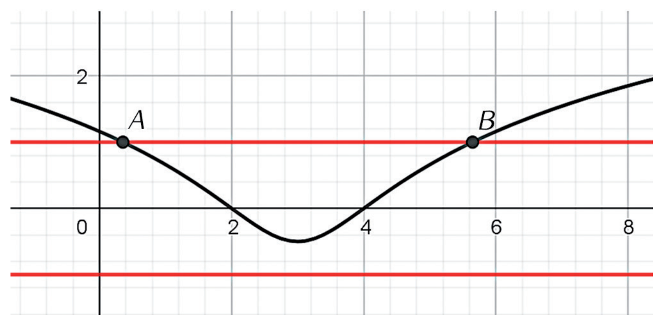
De verzameling middens is dus aan te duiden met $y^2 = -x$ waarbij $y \leq -2$ of $y > 0$.

Algebra, Opgave 1 (1963)
Gegeven is de meetkundige rij waarin $p, p^2, p^3, \ldots,$ $p^k \ldots$, waarin $p = {}^4\log(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5)$.
a. Voor welke waarden van x is deze rij sommeerbaar?
b. Welke waarden kan de som van de rij aannemen?

Uitwerking opgave 1

De hbs'ers waren bekend met het begrip sommeerbaar. Een oneindige rij heet, in geval s_n (onder s_n verstaat men de som van de eerste n getallen van een rij) een limiet heeft, sommeerbaar. De hbs'ers wisten dat de absolute waarde van de reden kleiner dan 1 moest zijn. Deze kennis is waarschijnlijk alleen nog weggelegd voor onze wiskunde D-leerlingen.

Zij moeten oplossen $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 > 0$ en $|{}^4\log(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5)| < 1$. Met behulp van de discriminant zien ze meteen dat aan de eerste voorwaarde voor elke x is voldaan. Met behulp van GeoGebra kunnen ze alles weer mooi in beeld brengen. Zie figuur 8.



figuur 8

Opgelost moet worden: ${}^4\log(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5) = 1$ en dat geeft $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = 0$. De discriminant hiervan is gelijk aan 7, we hebben dus twee oplossingen. Bijgevolg is de rij sommeerbaar als $3 - \sqrt{7} < x < 3 + \sqrt{7}$.
De hbs'ers moesten vervolgens met tekenverlopen aan het werk.

De som van de rij is gelijk aan $\frac{p}{1-p}$, waarbij $|p| < 1$,

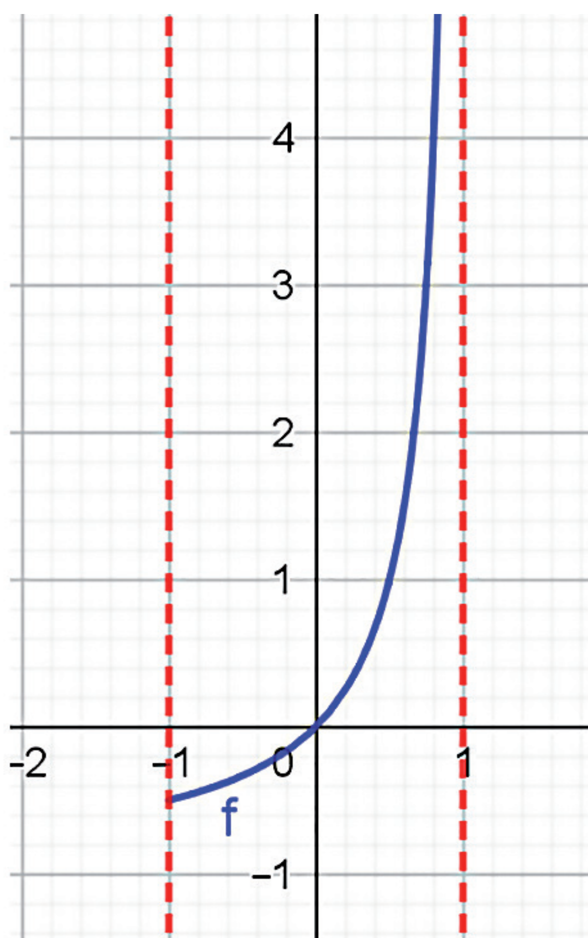
maar welke waarden gaat die som aannemen?

Met het commando functie($y=\frac{x}{1-x}$, -1, 1) tekenen we de grafiek op het interval <-1,1>, zie figuur 9. Uit symmetrieoverwegingen, zie figuur 8, zien we dat voor $x = 3$ de kleinste p-waarde hebben, die is gelijk aan

$^4\log(\frac{1}{2}\cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 5) = {}^4\log\ \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

De som is dan $\frac{-\frac{1}{2}}{1--\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$.

Grafisch gezien is de som $\frac{p}{1-p}$ een deel van een stijgende tak van een hyperbool. Dus de som is groter of gelijk aan $-\frac{1}{3}$.



figuur 9

Goniometrie, opgave 1 (1963)

1 Beschouw de functies $f(x)=\frac{1}{\sin(x)}$ en $g(x) = p \cdot \cos x$; $0 \le x \le 2\pi$.

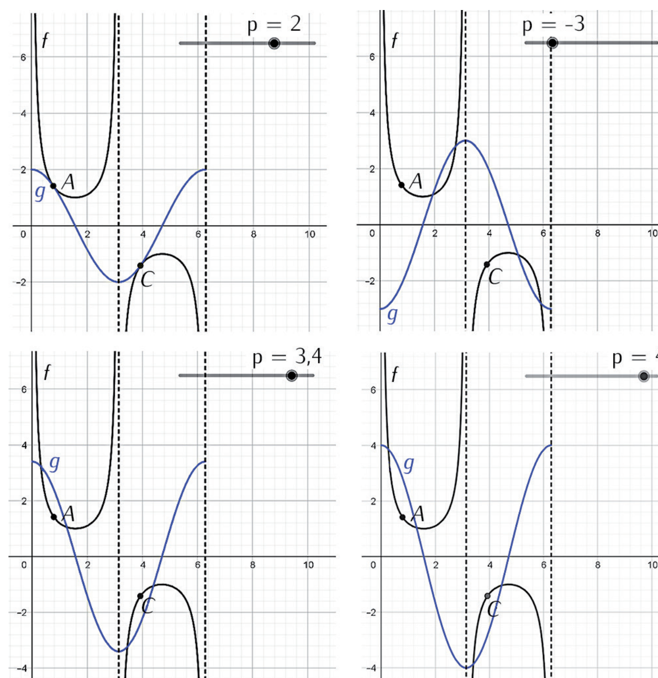
a Teken voor het geval dat $p = 2$ in één figuur de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$.

b Onderzoek hoe groot, bij veranderlijke p, het aantal gemeenschappelijke punten van de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ is.

c Als $p = 4$, voor welke waarden van x is dan $f(x) \le g(x)$?

Uitwerking opgave 1

Deze opgave leent zich weer uitstekend voor het gebruik van GeoGebra. Bij opgave b. kunnen we prachtig gebruik maken van een animatie. Zie het beeldverhaal in figuur 10. Op de site van *Euclides* zijn de plaatjes te downloaden en in de digitale *Euclides* staan de animaties.



figuur 10

Stereometrie

Op de hbs werd ook stereometrie gegeven. Later werd dat op het vwo ruimtemeetkunde genoemd. Bij de opgaven stonden geen tekeningen. Ik vrees dat de leerlingen van nu, met de vectormeetkunde, dat niet meer kunnen maken. Bijvoorbeeld: 'bereken de afstand van twee kruisende lijnen'. Dit onderwerp wordt niet meer behandeld.

Tot slot

Sommige hbs'ers menen dat onze vwo-leerlingen de hbs-examenopgaven niet meer kunnen maken. Andersom kunnen we de vraag stellen of de hbs'ers de vwo-examenopgaven van nu kunnen maken. Eén verschil is er zeker. Het wiskundeonderwijs is toegankelijker en van meer betekenis geworden.

Noten

[1] Bouwman, R. & Steenhuis, H. (2017). *Wij van de HBS.* Amsterdam: Meulenhoff Boekerij bv.

[2] In het boek is er sprake van het Herexamen van 1963 en dat is onjuist. In die tijd waren er helemaal geen herexamens. Het is een examen volgens het nieuwe programma, dat in 1961 werd ingevoerd. Zie het boek van Kruijtbosch, D.J. & Richter, S.J. (1970). *Schriftelijke opgaven van het eindexamen van de hbs-b.* Groningen: Wolters-Noordhof.

Met dank aan Matthijs Wielders oud-docent Open Universiteit.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

MEDEDELING



NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Op 16 maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op twaalf universiteiten. De opgaven en uitwerkingen zijn te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.
Ongeveer duizend leerlingen waren uitgenodigd voor de tweede ronde. De leerlingen deden mee in drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer veertig leerlingen uitgenodigd worden voor de finale in september. Wie deze winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekendgemaakt.

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

CWI en ProRail voorspellen incidenten op het spoor

Het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) en ProRail zijn onlangs een onderzoekssamenwerking gestart op het gebied van incidentafhandeling op het Nederlandse spoor. Het onderzoek richt zich op het voorkomen en afhandelen van een breed scala aan incidenten op het spoor, zoals spoorlopers, verstoringen in de infrastructuur en aanrijdingen.
Onderzoekers van het CWI zullen op basis van data van ProRail voorspellingen doen over het tijdstip en locatie van mogelijke toekomstige incidenten, zodat ProRail daarop in kan spelen en de incidenten kan proberen te voorkomen. Daarnaast analyseren de CWI-onderzoekers welke aanpassingen op het gebied van personeel en middelen in de ProRail Incidentenbestrijding organisatie zullen leiden tot een prestatieverbetering bij het voorkomen en afhandelen van incidenten op het spoor.
Er wordt gebruik gemaakt van data op het gebied van incidenthistorie, evenals geografische en demografische data. De *Stochastics* groep van het CWI heeft ruime ervaring op het gebied van het voorspellen van incidenten. Zij hebben bijvoorbeeld algoritmes ontwikkeld die de dekking van beschikbare ambulances binnen een regio optimaliseert. Uit dit onderzoek is spin-off *Stokhos* voortgekomen: *Stokhos* levert softwareoplossingen voor het proactief herplaatsen van noodhulpdiensten op basis van toekomstverwachtingen.
Bron: *https://www.cwi.nl/nieuws/2017/cwi-en-prorail-voorspellen-incidenten-op-het-spoor*

Negen wiskundestudenten winnen jong talent aanmoedigingsprijs

Negen studenten in de (technische) wiskunde kregen op 27 november bij de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem een Jong Talent Aanmoedigingsprijs van € 500 voor hun studieresultaten in het eerste studiejaar. Deze Jong Talent Aanmoedigingsprijzen zijn beschikbaar gesteld door ORTEC om de studie in wiskunde te stimuleren.
Adriaan Tas, Expert Consultant ORTEC Consulting, reikte deze Jong Talent Aanmoedigingsprijzen uit aan: Sven Cats (RUG), Alex Spieksma (Universiteit Leiden), Sam van Poelgeest (TU Delft), Mick Gielen (UvA), Sven Dummer (Universiteit Twente), Hidde Schönberger (Universiteit Utrecht), Daan van Sonsbeek (Radboud Universiteit Nijmegen), Reinier Schmiermann (TU Eindhoven) en Luc Veldhuis (VU).
De KHMW te Haarlem verzorgt jaarlijks de jurering en de prijsuitreiking. Volgend jaar zijn er opnieuw Jong Talent Prijzen te winnen. (Reinier Schmiermann schreef vorig jaar nog over zijn Olympiade-ervaringen in *Euclides 92-2*)
Bron: *https://wiskundepersdienst.nl/nieuwsberichten/1101*

Nieuw record priemgetal

Het record voor het grootste priemgetal ooit is rond de jaarwisseling gesneuveld. Het getal bestaat uit 23.249.425 cijfers, bijna een miljoen cijfers meer dan de vorige recordhouder. Wie het priemgetal zou printen, kan 9.000 boekpagina's vullen. 'En als je elke seconde vijf cijfers binnen 2,5 centimeter invult, heb je 54 dagen later het getal van 118 kilometer lang', aldus Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS), een collectieve zoektocht naar zulke extreme getallen. Een dergelijk getal heet een Mersennepriemgetal, naar de Franse wiskundige en monnik Marin Mersenne die meer dan 350 jaar geleden dit wiskundige fenomeen bestudeerde.
Vrijwilliger Jonathan Pace is de gelukkige ontdekker. Een van de computers van de 51-jarige elektrotechnicus had zes dagen non-stop rekenen nodig om het getal te vinden. Pace was al veertien jaar op zoek naar een Mersennepriemgetal en had er niet eens een supercomputer voor nodig. De computer waarop het uiteindelijk lukte had een makkelijk verkrijgbare Intel i5-6600 processor van twee generaties geleden. Na zijn vondst werd het getal met vier verschillende programma's op vier verschillende computers nagerekend. Pace krijgt mogelijk een beloning van 3.000 dollar en waarschijnlijk een vermelding in het *Guinness Book of World Records*.
Voor de geïnteresseerden die het getal willen zien: het is te downloaden in een bestand van ongeveer 10 mb via de bron: *https://www.ad.nl/economie/grootste-priemgetal-ooit-ontdekt~a33478f2/*

4673331833592310999883355855611155212513211028177144957985823385935679234805211772074843110997402088
4962136809003804931724836744251351914436524922028678749922492363963303861930595117077052285035601177
9638644050954128274109548519743273551014325753249976993808191641040774990607027085131780854431482719
2879270515747600591825011224264939011775241470201122113881802463571203852569710311808614896188925840
6775097681495456790744215925392808604345151310705231857280062253517330504393154504927694689628526886
9674944342112985792233732337801754241421827174125670264416644353313890442672256181107628062641550510
9923842039912255378570492258674504781998501869851883957199630080387179659069436984462272457690484426
2407704045651692639000865172646299059376059542948679165463356213921674455767274649788443435352045655
6797052450980481438931349795938877105350614496693489409255155953306872814733490045565082856578190868
9333271410463787949726552668938875959796413163310288065921775297698341521241159133233652681667066444

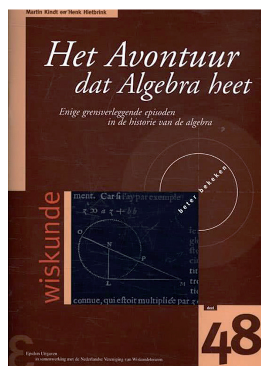
De eerste duizend cijfers van het grootste priemgetal

BOEKBESPREKING

HET AVONTUUR DAT ALGEBRA HEET



Rob van Oord



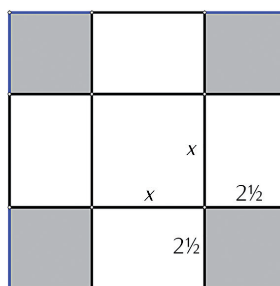
Titel: Het avontuur dat algebra heet (zebra 48)
Ondertitel: Enige grensverleggende episoden in de historie van de algebra
Auteurs: Martin Kindt en Henk Hietbrink
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2017)
ISBN 978-90-5041-160-8
Prijs € 10,00 (paperback, 68 blz.)

Rekenen aan meetkundige plaatjes

Bij het lezen van deze titel komen de volgende vragen in me op: Welk avontuur krijgen we te zien? Welke episoden zijn grensverleggend geweest? Het boekje begint met de merkwaardige producten, die zijn eerder opmerkelijk dan merkwaardig. Algebra is in oorsprong geschreven als rekenen aan meetkundige plaatjes. De merkwaardige producten kun je dan ook goed snappen als je met oppervlaktes van rechthoeken werkt in geschikt gekozen plaatjes. Hoe de Babyloniërs dit 3000 jaar geleden deden wordt met enkele voorbeelden met duidelijke figuren uitgelegd. Daarbij wordt de lezer flink uitgedaagd om zelf op de plaatjesmanier vergelijkingen op te lossen.

Vierkantsvergelijkingen

We weten allemaal dat het woord algebra afstamt uit de titel van een boek dat Al-Khwarizmi (omstreeks 830 n.C.) schreef over rekenen. Vierkantsvergelijkingen vormden eeuwenlang de kern van de algebra. Al-Khwarizmi onderscheidt in zijn boek verschillende typen vierkantsvergelijkingen. In onze huidige wiskundeboeken wordt al snel toegewerkt naar de *abc*-formule. Maar het zou beter zijn om de leerlingen met denkactiviteiten aan het werk te zetten aan de hand van handig gekozen figuren. De schrijvers laten hiervan een mooi voorbeeld zien uit het boek van Al-Khwarizmi. De vergelijking $x^2+10x=39$ wordt opgelost door aan alle zijden van een vierkant met zijde x een rechthoek van x bij 10/4 te tekenen. Je krijgt nu een uitslag van een doos van x bij x bij 2½ op een vierkant blaadje met zijden van 2½ + x + 2½, zie figuur 1. De oppervlakte van de uitslag was 39 (gegeven), dus de oppervlakte van het vierkante blaadje waar de bouwplaat van de doos van gemaakt kan worden is dus 39 + 4 · (2½)^2 = 64. Oh, dus $x + 5 = 8$, dus $x = 3$. Al-Khwarizmi geeft ook een andere manier om dit probleem op te lossen, met een ander plaatje. Hier ligt een kans voor docenten. Laat leerlingen zelf plaatjes maken om verschillende vierkantsvergelijkingen op te lossen. Natuurlijk wordt de negatieve oplossing -13 nu niet gevonden. Is dat erg? Ik vind van niet.



figuur 1

> 'DE ONTWIKKELING VAN DE ALGEBRA IS VOORAL GEVORMD DOORDAT GELEERDEN ZICH TELKENS NIEUWE VRAGEN STELDEN.'

Derdegraadsvergelijkingen

Zoals we weten kwam door handel met het Oosten en het stichten van universiteiten in Italië in de zestiende eeuw de belangstelling voor wiskunde op gang. Geleerden daagden elkaar uit met puzzels en onopgeloste opgaven. Hoe gevoelig sommige problemen waren, wordt ook beschreven aan de hand van de onderlinge strijd tussen de geleerden Tartaglia en Cardano bij het oplossen van derdegraads vergelijkingen.
In *Het avontuur van de algebra* wordt duidelijk dat door voortdurend op slimme wijze hulpvariabelen in te voeren een vergelijking ineens wél kan worden opgelost. Hoewel Cardano in zijn oplossing stuitte op een kwadraat van een getal dat -15 moet zijn, besloot hij hier niet mee verder te gaan, hij vond dit nutteloos.
Toen Bombelli enkele jaren later bij het toepassen van eerder gevonden formules met hulpvariabelen op $\sqrt{-121}$ stuitte kwam hij op een avontuurlijke gedachte om te gaan rekenen met $2+\sqrt{-1}$.

Deze periode was dus grensverleggend voor de algebra. Het zou nog wel een paar eeuwen duren voordat deze nieuwe getallen in de wiskundewereld werden geaccepteerd.

Factorstelling

De volgende episode gaat over bewijzen bij vergelijkingen. Het gaat daarbij niet over de vraag hoe, maar of je een vergelijking kunt oplossen. Zo komt de factorstelling aan de orde. Een n-de graads vergelijking heeft maximaal n oplossingen. Daarna komt als logisch vervolg een hoofdstuk over complexe getallen en het complexe vlak.

Cirkeldelingen

Het avontuur gaat verder met het zoeken naar mogelijke cirkeldelingen met passer en liniaal. Zo blijkt het oplossen van vierkantsvergelijkingen ook praktisch nut te hebben. Er wordt verteld, zij het soms in opgaven, dat het construeren van een regelmatige 3-, 4-, 5- en 6-hoek wel met passer en liniaal kan, maar de regelmatige 7-hoek niet. Hiervoor moet je de theorie van Galois gebruiken. Die wordt uiteraard niet in dit boekje behandeld. Uiteindelijk mondde de factorstelling uit in de hoofdstelling van de algebra. Als toetje laat dit boekje zien hoe Gauss op jonge leeftijd bewees dat een regelmatige 17-hoek wél met passer en liniaal geconstrueerd kan worden.

Tot slot

Het boekje is prettig geschreven. De gestelde opgaven sluiten goed aan bij de behandelde theorie, of dienen juist om de theorie beter te begrijpen. Het aantal van 67 opgaven is best aanzienlijk. Achterin staan de antwoorden van alle opgaven. Dus met af en toe spieken valt het doorwerken van het boekje dan wel weer mee.
Ook de menselijke maat komt goed naar voren. Wiskunde is gemaakt door personen. De ontwikkeling van de algebra is vooral gevormd doordat geleerden zich telkens nieuwe vragen stelden. Wat ik mis zijn open eindopdrachten waarmee leerlingen zelf wat dieper op de stof zouden kunnen ingaan of een toepassing van de theorie kunnen laten zien.
In Zebra 20 *Babylonische wiskunde* wordt ook beschreven hoe de Babyloniërs vergelijkingen oplosten. Dit boekje bijt de daarin behandelde manieren geenszins. De beschreven voorbeelden van hoe Al-Khwarizmi de Babylonische opgaven oploste zijn verschillend van die in Zebra 20. Kortom een prachtig boekje dat ik elke wiskundedocent van harte kan aanbevelen.

Over de auteur

Rob van Oord is docent wiskunde. Na veertig jaar lesgeven op het Coenecoopcollege in Waddinxveen, valt hij nu regelmatig in op scholen in de regio. Hij is voorzitter van de werkgroep havo-vwo en geeft regelmatig workshops op de NWD.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

GETUIGEN

TUINONDERHOUD

Danny Beckers

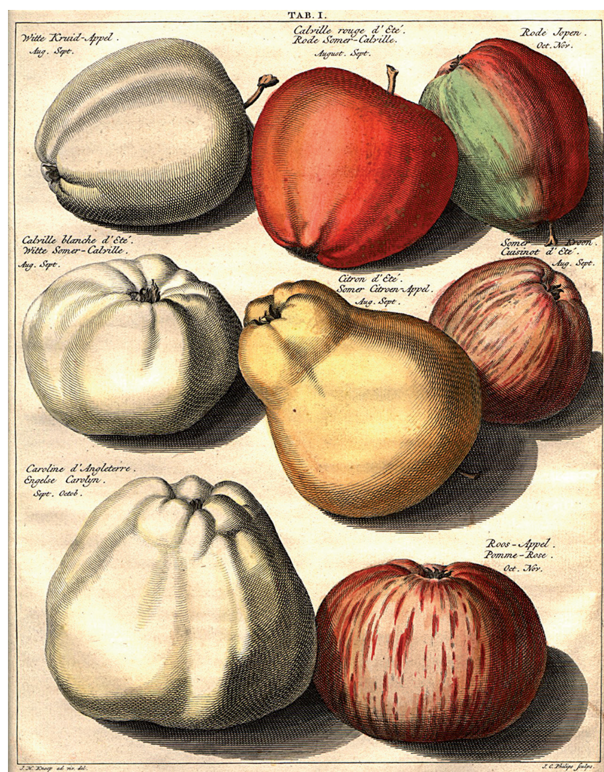
Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee over het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



figuur 1 J.H. Knoop, *Beschouwende en Werkdadige Hovenier-Konst* (1753), plaat III

Wiskunde, tuinen en appels

De achttiende-eeuwse wiskundige Johan Herman Knoop publiceerde tussen 1750 en zijn dood in 1768 een aantal boeken op het gebied van tuinaanleg. De mooiste boeken zijn die over vruchten, met daarin vele handgekleurde gravures, die inmiddels een verzamelobject zijn geworden. Nu eet de gemiddelde wiskundedocent vast wel eens een appeltje, maar de meesten zullen er toch niet snel een boek over schrijven. Hoe kwam een achttiende-eeuwse wiskundige op het idee om deze boeken te publiceren?



figuur 2 J.H, Knoop, *Pomologia* (1758), plaat I.
Universiteitsbibliotheek Rijksuniversiteit Groningen



figuur 3 J.H. Knoop, *Pomologia* (1758), plaat II.
Universiteitsbibliotheek Rijksuniversiteit Groningen

Men kan de vraag ook andersom stellen. Hoe komt een historicus vandaag de dag op het idee om een achttiende-eeuwer die over tuinaanleg en appels publiceerde, als wiskundige te bestempelen? Die vraag kan ik korter en met meer zekerheid beantwoorden dan de eerste. Knoop publiceerde in 1744 een heruitgave van een indertijd veelgebruikt leerboek voor landmeters. Aan dat boek, overwegend praktisch van aard, had hij een uitvoerige meetkundige inleiding toegevoegd, om te zorgen dat de studenten die het boek ter hand namen ook enige theoretische achtergrond hadden bij het werk dat ze uitvoerden. Hij noemde zichzelf op het titelblad van dat boek een 'liefhebber der mathematische wetenschappen': de titel die wiskundigen indertijd aannamen wanneer ze geen academische graad hadden om mee te pronken. In de periode 1750-1768 gaf hij wiskundelessen, publiceerde nog een wiskunde(les)boek en construeerde hij zonnewijzers.

Maar nu terug naar de oorspronkelijke vraag. Zoals aangegeven vergt het antwoord hier iets meer woorden en is het ook minder definitief. Wat precies de persoonlijke motieven van Knoop zijn geweest kunnen we hem immers niet meer vragen, maar zijn publicatie wekt veel minder verbazing wanneer men de boeken beziet in de context van die tijd.

Lusttuinen

Tuinaanleg was rond het midden van de achttiende eeuw een kleine hype. De tuinman was zodoende ook een gevierd ambachtsman. Met de tuinen rond het hof van Versailles was door de Franse koningen een trend gezet die overal in Europa werd gevolgd. De lusttuinen waren groots, symmetrisch en voorzien van fonteinen en beelden. De tuin van de zonnekoning symboliseerde diens macht. De tuin weerspiegelde het gegeven dat de vorst de ultieme controle had over de Schepping – in al haar details. En wie kende de wetten van de Schepper beter dan de wiskundige? Het waren steevast wiskundigen die bij de aanleg van de tuinen betrokken werden. Diezelfde wiskundigen die ook in staat waren gebleken om vestingwerken te bouwen die steden beschermden tijdens beschietingen, die landkaarten maakten op basis van metingen. Andersom werkte het ook: de hovenier met ambities, zorgde dat hij zich ook wiskundige kon noemen, door zich te bekwamen in de reken- en meetkunde.

> 'DE TUINEN VAN VERSAILLES WAREN EEN VOORBEELD VAN DE BEHEERSING VAN DE SCHEPPING

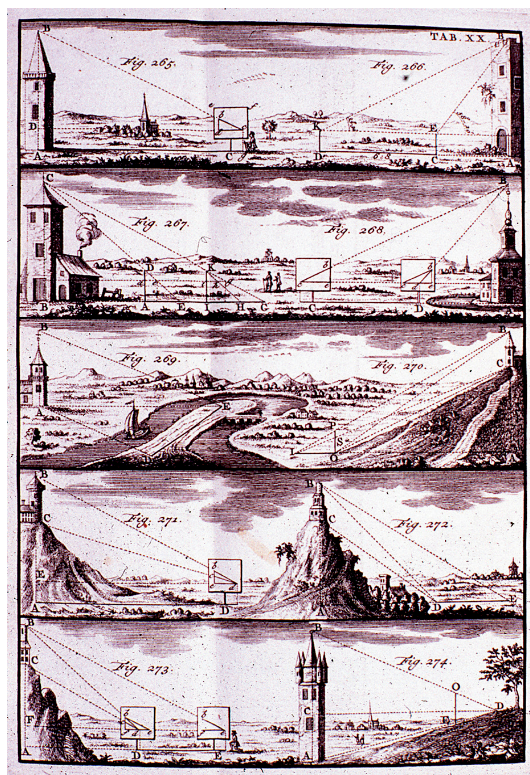
Begrip van de Schepping

Het ultieme wiskundige werk van de periode rond 1700 was de *Principia Mathematica* van Newton. In dat boek, iedereen kende het maar vrijwel niemand had het echt gelezen, werd op basis van een beperkt aantal axioma's

het functioneren van ons zonnestelsel beschreven. Die axioma's verwierven al snel de status van wetten. Die status van 'wet' was veelbetekenend: alleen God en de koning mochten wetten uitvaardigen. Met de term 'wet' claimden wiskundigen dus een status die zij voorheen niet hadden: ze kenden en begrepen de Schepping – als geen ander – en dat toonden zij aan door die Schepping te beheersen. Dat deden zij door die Schepping te beschrijven en te voorspellen, zoals men bijvoorbeeld kon met zons- en maansverduisteringen. De tuinen van Versailles waren ook een voorbeeld van de beheersing van diezelfde Schepping.

Landgoed bij Leeuwarden

Knoop was in die zin een wiskundige. Zijn vader was, onder de naam Knauf, als hoofdtuinman in dienst van de landgraaf Carl van Hessen-Kassel (1654 - 1730). Er was een innige band tussen deze landgraaf en de stadhouders in de Nederlanden. De dochter van de landgraaf, Maria Louisa van Hessen-Kassel (1688 - 1765), trouwde in 1709 met stadhouder Willem Johan Friso (1687 - 1711), prins van Oranje. Rond 1700 waren de tuinen van het landgoed van haar vader nabij Kassel onder leiding van de vader van Johan Herman Knoop, ingericht volgens de principes die ook in Versailles waren gehanteerd. Dat wilde de prinses ook voor haar landgoed bij Leeuwarden, en om dat te bereiken, verzekerde ze zich van de diensten van de zoon van de tuinman uit Kassel. Zoon Knauf nam direct een Nederlandse naam aan en maakte zich de taal eigen.



figuur 4 Plaat XX uit Johan Herman Knoops 1744-editie van Johannes Morgenster, *Werkdadige Meetkonst*

In dienst van de Oranjes

Rond 1731 kwam Knoop zodoende in dienst van de Oranjes in Friesland. Daar was hij mede verantwoordelijk voor de aanleg van de tuinen. Hij ontpopte zich in zijn publicaties als een wiskundige. Het eerder genoemde meetkundeboek publiceerde hij met een uitvoerige opdracht aan de Oranjes.
Als wiskundige voelde hij zich bij uitstek toegerust om ook de Schepping te bestuderen. Hij was vooral geïnteresseerd in de eigenschappen van vruchten, het kruisen van verschillende soorten vruchten en de wetmatigheden die daaraan verbonden waren. Dat waren een ander soort wetmatigheden dan die achter de beweging van hemellichamen, maar zeker ook de aandacht van de wiskundige waardig. Knoop was in meerdere opzichten 'bij de tijd': het streven van Carl Linnaeus (1707-1778), om alle planten en dieren te categoriseren en te beschrijven, was hem niet onbekend. In 1749 werd hij uit de dienst van de Oranjes ontslagen. Er bestaat een aantal aanwijzingen dat er iets rommelde in de hofhouding op dat moment. Hoewel een aantal bronnen de drankzucht van Knoop als aanleiding tot het ontslag noemt, lijkt een hofintrige ook niet uit te sluiten. Knoop heeft in de jaren vanaf 1750 meer gepubliceerd, waaronder dus de boeken over vruchten en tuinen. Daarmee verdiende hij de kost, en daarnaast profileerde hij zich meer als wiskundedocent. Hij stierf desondanks in armoede.

Tot slot

De vraag aan het begin van dit stuk is met dit verhaal wel beantwoord. Blijft over wat ons dit leert over het wiskundeonderwijs in die tijd? Ten eerste dat de carrière van een wiskundedocent in de vroege achttiende eeuw er bepaald anders uitzag dan vandaag de dag. Ten tweede dat wiskunde, en dus wiskundelessen (!) indertijd aantrekkelijk waren omdat er een carrière mee te maken viel.
En ten derde, dat wiskunde en tuinonderhoud in de achttiende eeuw meer met elkaar te maken hadden dan je vanuit een 21ste-eeuws perspectief, zou verwachten!

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

FACES OF SCIENCE

INTERVIEW MET CLARA STEGEHUIS

Martine Zeijlstra

Wiskunde is overal: in je muesli, op Facebook, in honkbal en als je moet kiezen naar welke middelbare school je wilt. En dat is precies wat wiskundige Clara Stegehuis er leuk aan vindt. Ze is promovendus Technische Wiskunde bij de TU Eindhoven en onderzoekt de eigenschappen van grote netwerken zoals sociale netwerken, communicatienetwerken of het internet. Ze wil haar ervaringen delen met middelbare scholieren via een blog op *Faces of Science*.



figuur 2 Clara Stegehuis. (foto: Tessa Posthuma de Boer voor Faces of Science)



figuur 1 De site *Faces of Science*

Breed toepasbaar

Clara Stegehuis hoeft niet lang na te denken als je haar vraagt wat wiskunde zo interessant maakt. 'Ik vind het vooral leuk dat het zo breed toepasbaar is. Overal heb je wiskunde voor nodig en je vindt wiskunde ook overal in terug.' Op *Faces of Science*, een samenwerking van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW), de Jonge Akademie en NEMO Kennislink blogt Stegehuis over de meest uiteenlopende onderwerpen.
Op die site schrijven zo'n vijftig promovendi van verschillende universiteiten en vakgebieden over hun onderzoek. Ze schrijft bijvoorbeeld over haar ontbijt, en hoe je zelfs daarin wiskunde kunt ontdekken. Want niet iedereen roert hetzelfde door de yoghurt. De een verfoeit krenten, de ander is een groot fan van cranberry's, en weer een ander kan niet zonder chocolade door de muesli. Maar welke ingrediënten zijn nu het meest favoriet? Alle muesli-onderdelen kun je zien als een netwerk, zegt Stegehuis, en zo'n netwerk maakt het makkelijk om te ontdekken welke combi's het meest voorkomen. Na haar uitleg over het netwerk in krenten en cranberry's legt Stegehuis in eenvoudige taal uit wat de overeenkomsten zijn met haar eigen promotieonderzoek, en hoe zij netwerken zoekt in complexe zaken als social media of andere communicatienetwerken.

De kracht van wiskunde

Als promovendus zit Stegehuis dus goed op haar plek, maar het duurde wel even voordat ze wist dat wiskunde zo'n belangrijke rol in haar leven zou spelen. 'Ik vond wiskunde op mijn middelbare school wel leuk, maar biologie en natuurkunde ook. Ik was goed in wiskunde, maar had niet altijd even geïnteresseerde leraren op de middelbare school, dat was dus niet zo inspirerend. Sommigen gaven me bijvoorbeeld wel extra stof om met complexe getallen te rekenen en dat vond ik wel fascinerend.' Maar ze had ook docenten die 'je snapt het toch wel, je hoeft niet te komen' tegen haar zeiden. 'Niet echt motiverend, maar ja, het is ook geen makkelijke taak om leerlingen te inspireren.' Al denkt de promovendus dat het wel helpt als je als docent leerlingen problemen uit de praktijk laat oplossen met behulp van wiskunde.
Zo moest ze zelf in haar eerste jaar uitrekenen wat de adviessnelheid voor auto's in tunnels moest zijn. 'Je moet dan bedenken hoe groot de afstand tussen de auto's moet zijn als ze een bepaalde snelheid rijden en hoeveel auto's er dan door die tunnel heen kunnen. Met een rekenmodel en pen en papier kun je daar dan samen met je leerlingen uitkomen. Het is meer dan sommen maken: je ziet meteen wat er handig aan is om zoiets als een adviessnelheid te berekenen.'
Pas in haar eerste jaar ontdekte Stegehuis door dit soort opdrachten wat de kracht van wiskunde is. Tijdens haar middelbare schooltijd had ze die voorliefde voor wiskunde nog niet zo sterk. 'Ik heb het wel altijd fijn gevonden dat wiskunde zo duidelijk is. Het klopt, of het klopt niet. Je hoeft niet allerlei experimenten uit te voeren, zoals bij natuurkunde of scheikunde om te ontdekken of het klopt. Maar wiskunde op de middelbare school en een studie wiskunde zijn heel anders. Op de middelbare school was het voor mij vooral sommen maken, en wist ik nog niet hoe breed het was en wat je er allemaal mee kunt.'
Eigenlijk had Stegehuis zich voorgenomen om een studie biomedische technologie te volgen, maar vlak voordat het collegejaar begon switchte ze nog naar wiskunde. 'Ik vond het lastig om te bedenken wat ik de rest van mijn leven wilde gaan doen. Dat is misschien ook wat veel gevraagd van iemand van achttien.' Ze vond biomedische technologie te veel toegespitst op een onderwerp. 'Als ik het niet leuk zou vinden, dan had ik verder niet zo veel keuze meer.

Ik was bij een open dag geweest van wiskunde, en daar hoorde ik dat wiskunde heel breed is, waardoor je er veel kanten mee op kunt. Je kunt ermee terecht bij een bank en bij hersenonderzoek. Dat sprak mij meer aan, uiteindelijk.'

Schot in de roos

Het bleek een schot in de roos. Hoe verder ze in haar studie kwam, hoe fascinerender ze de stof vond. 'Tijdens je studie ga je veel dieper op de stof in. Op de middelbare school heb je wel wat kansberekening en geometrische dingen, maar het is toch anders. In plaats van drie uur wiskunde heb je ineens veertig uur wiskunde en daardoor zie je heel veel verschillende dingen.' Vooral die veelzijdigheid spreekt haar aan. 'Wiskunde kan heel abstract zijn, maar ook heel praktisch. Je kunt er allerlei problemen mee oplossen. En ik kan het overal doen: het enige wat ik nodig heb is pen en papier, of een computer.'
Voor haar eigen onderzoek naar netwerken gebruikt Stegehuis vooral kansberekening. Op die manier hoopt ze netwerken te ontrafelen, zodat je met wiskundige modellen na kunt gaan hoe deze in elkaar steken, maar ook, in het geval van sociale netwerken, hoe iets *viral* kan gaan op Facebook, of hoe een virus zich verspreidt met behulp van een netwerk. Wat haar vooral aanspreekt aan haar eigen onderzoek is dat het twee werelden combineert. 'Elke dag zit vol met heel veel wiskunde, maar het raakt nog wel aan de echte wereld. Ik kan in echte datasets checken of het klopt wat ik heb berekend. Want netwerken vind je overal terug: bij Google, Facebook, maar ook in netwerken van je brein.'

Liefde voor wiskunde delen

Al die kennis die ze opdoet belandt niet alleen in haar proefschrift. Stegehuis wil haar kennis en de liefde voor wiskunde ook graag delen met middelbare scholieren met hulp van blogs op *Faces of Science*. Ze schrijft bijvoorbeeld over hoe je ervoor kunt zorgen dat een bericht viraal gaat op Facebook en hoe je dat terugvindt in een netwerk. Maar ze blogt ook over onderwerpen die verder van haar eigen onderzoek afliggen, zoals honkbal. Vier studenten van de TU Eindhoven zochten uit hoe kansrekening het Nederlandse honkbalteam helpt om hun prestaties op het volgende WK te verbeteren en Stegehuis legt uit hoe dat in zijn werk gaat. Weer een ander blog gaat over hoe je met wiskunde op een eerlijke manier een middelbare school kiest. De gemeente Amsterdam kampt bijvoorbeeld al jaren met het probleem dat er te veel leerlingen naar populaire scholen willen, waardoor ze vaak niet in aanmerking komen voor de school van hun eerste keus. De promovendus legt uit hoe je met een wiskundig model kunt voorkomen dat te veel kinderen teleurgesteld raken en zo niet langer op de school van hun derde of vierde keus belanden. 'Ik schrijf over zulke veelzijdige onderwerpen, omdat ik hoop dat middelbare scholieren zo zien hoe breed en interessant wiskunde is. Wiskunde heeft zoveel vakgebieden en ik vind het erg leuk om leerlingen daar een idee van te geven', zegt Stegehuis. Door haar blogs krijgt ze af en toe vragen van bachelorstudenten die haar om hulp vragen, maar van middelbare scholieren heeft ze nog geen reacties gekregen op haar blogs. 'Dat lijkt me wel heel leuk, ik ben benieuwd wat ze graag willen weten.'



figuur 3 De 'Faces of Science' in het Trippenhuis van de KNAW (foto: Tessa Posthuma de Boer, voor Faces of Science)

Toekomst

Stegehuis vindt het dus prettig om anderen te inspireren om wiskunde te gaan studeren en leerlingen een goed beeld te geven van de studie. Maar hoe haar eigen toekomst er uit gaat zien, weet ze nog niet. 'Ik heb er nog geen idee van wat ik precies wil gaan doen en gelukkig hoeft dat ook niet. Eerst wil ik mijn promotieonderzoek goed afronden, ik heb nog anderhalf jaar om die keuze te maken, want dan ben ik klaar.'
Wel weet ze zeker dat wiskunde een grote rol blijft spelen in haar leven. 'Ik vind het zonde om in een baan terecht te komen zonder wiskunde, dat zou ik dus niet willen. Maar wat dat wordt, dat moet ik dus nog uitvogelen.'

Al denkt ze niet dat het moeilijk wordt om een baan te vinden als ze haar keuze heeft gemaakt. Met wiskunde kent ze een rooskleurige toekomst. 'Collega's en medestudenten hebben nadat ze klaar waren geen enkele moeite gehad om een baan te vinden die ze leuk vonden en die bij ze paste,' zegt de promovendus. 'En dat is best bijzonder, want bij vrienden en vriendinnen van de middelbare school die iets heel anders zijn gaan studeren ligt dat wel anders. Die hebben soms wel veel moeite om een baan op hun niveau te vinden. Dat is dus ook een voordeel van wiskunde studeren of onderzoek doen op het gebied van wiskunde.
Het levert een mooie baan op.'

Over de auteur

Martine Zeijlstra is freelance journalist en redacteur van Faces of Science. Samen met Robert Visscher schreef ze het boek *Delen doe je zo* over de deeleconomie.
E-mailadres: *zeijlstra@nemokennislink.nl*

WISKUNDEMATERALEN VOOR DOVE KINDEREN

Mirjam Abbes

WERELDWISKUNDEFONDS IN GAMBIA

Mirjam Abbes werkt deels in Nederland op een middelbare school en deels in Gambia, waar ze verschillende leraren begeleidt bij het ontwikkelen van lessen. Zo kwam ze in 2014 in aanraking met de St Johns school for the Deaf, de enige school voor dove en slechthorende kinderen in Gambia. Met steun van het Wereld Wiskundefonds wordt er voor basale materialen gezorgd.



De St Johns is voor leerlingen van de kleuterschool tot en met de middelbare school. Uit het hele land komen dove kinderen naar deze school. Ze wonen in bij familieleden of bij gezinnen die tegen betaling een kind willen opvangen.

Enorme rugzak

Tijdens elk bezoek aan Gambia werk ik een aantal dagen mee op de school. Er wordt goed les gegeven, maar er is weinig begeleiding van de gehandicapte kinderen. Deze kinderen hebben een enorme rugzak: ze wonen niet in het eigen gezin, ouders schamen zich voor hun gehandicapte kinderen en houden ze soms thuis verborgen, omdat deze kinderen worden gezien als een straf. Vaak is de doofheid pas op latere leeftijd ontdekt. Kortom een gehandicapt kind in Gambia wordt als onvolwaardig gezien. En dat zie je terug in het gedrag. Ze zijn bang om iets tekort te komen, kunnen moeilijk delen en vechten veel. Nadeel is ook dat de doventaal nog niet goed is ontwikkeld. Er zijn maar 200 tekens bekend. Ga je angsten en onzekerheden maar eens kenbaar maken in 200 tekens! Laat staan een ruzie oplossen.

Materialen

Al het lesmateriaal wordt handmatig gemaakt. Overal hangen posters met tekens, plaatjes en informatie. Heb je een schrift en een potlood dan kun je goed meedoen. Heb je dat niet, dan heb je pech. Dus op de vraag of er materialen nodig waren voor de wiskundeles op het middelbaar niveau werd als eerste om schriften en potloden gevraagd. Zo basaal. De uiteindelijke lijst met materialen die ze willen hebben bevat niets speciaals, wiskundeboeken, rekenmachines, linialen, pennen en schriften. Het zijn de normale dingen die nodig zijn om een standaard wiskundeles te geven. Ik ga zelf op pad om de materialen aan te schaffen en op school af te leveren. De dag van de aanschaf gaat echt op z'n 'Gambiaans'. De wiskundedocent laat op zich wachten, het hoofd van school gaat toch liever naar de voetbalwedstrijd van zijn leerlingen, de bus die gebruikt mocht worden is voor iets anders ingezet, de prijzen kloppen niet meer en als al het materiaal gekocht is, is de school afgesloten en kunnen de spullen niet afgeleverd worden. 'Zet maar voor de deur, straks komt de nachtwacht en die zet het wel binnen.' Nee, dat doe ik niet, ik ken Gambia te goed.

Wiskundeles

Een dag later bezoek ik de wiskundeles om wat foto's te maken. De kinderen zijn overdonderd en blij met het materiaal. Er zijn nieuwe lesboeken aangeschaft en een jongen gebaart druk dat ik bij hem moet komen kijken. Hij heeft een bepaald onderwerp in het boek herkend en hij begint spontaan met een potlood op de tafel te schrijven om een som uit te werken. Ik moet lachen, want ja zo gaat dat als je niet gewend bent om een schrift te hebben.



figuur 1 Aan de slag met de nieuwe materialen

Daarna loop ik nog even bij het hoofd van de school naar binnen. En als hij mij ziet roept hij al: 'Ja, ik weet dat de materialen er de volgende keer nog moeten zijn. Dat heb je al een paar keer gezegd en ik ben bang dat je me anders aangeeft bij de politie.' Hij heeft het gelukkig begrepen. Want ook dat is Gambiaans: van alle materialen, die waar dan ook gedoneerd worden verdwijnt een deel in de zakken van diegenen, die het niet nodig hebben.
Voordat ik vertrek werp ik nog een laatste blik in het wiskundelokaal en zie een tevreden leraar, die echt zin heeft in de nieuwe les.

Over de auteur

Mirjam Abbes is docente Duits aan de ISG Arcus in Lelystad. Regelmatig is zij in Gambia waar ze het onderwijs op diverse scholen ondersteunt.
E-mailadres: *mirjam.abbes@isg-arcus.nl*

WISKUNDE DIGITAAL

Lonneke Boels

In de zomer van 2016 bezocht ik het vierjaarlijkse ICME13 congres in Hamburg over onderzoek naar wiskundeonderwijs. Tijdens een van de presentaties leerde ik over het Klein project. Klein was een Duitse wiskundige die zich als hoogleraar zeer interesseerde voor het wiskundeonderwijs. Daarnaast is hij bekend van bijvoorbeeld de fles van Klein: een fles met een oppervlak zonder aanwijsbare binnen- en buitenkant. Het Klein project heeft een website met daarop materiaal speciaal gemaakt voor docenten wiskunde.

Wiskunde in het dagelijks leven

Felix Klein was hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Göttingen en bemoeide zich actief met het wiskundeonderwijs op de middelbare school. Dankzij hem is rond 1905 de differentiaal- en integraalrekening geïntroduceerd op het voortgezet onderwijs; iets wat in steeds meer landen navolging kreeg. Hij ontving verschillende onderscheidingen. Er zijn meerdere websites over het Klein project. We bespreken hier de website van het ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Het doel van dit project is om docenten van de middelbare school te voorzien van hulpmiddelen voor moderne wiskunde. Dat klinkt nog wat vaag maar één van die hulpmiddelen is bijvoorbeeld wat *vignettes* worden genoemd. Dit zijn korte stukken tekst van enkele A4-tjes waarin een link wordt gelegd tussen de wiskunde op school en het dagelijks leven of tussen het dagelijks leven en moderne wiskunde.

'LEUKE TOEPASSINGEN VAN MODERNE WISKUNDE.'



figuur 1 Klein project blog

Op zoek naar symmetrie

In deze rubriek bespreek ik één zo'n vignette: *Symmetry Step by Step*. Anna Canas da Silva schrijft hierin over symmetrische patronen in de kunst en de wiskunde achter die patronen. Weten uw leerlingen al dat er precies zeventien verschillende typen symmetrieën voor behangpatronen bestaan? De notatie voor al deze patronen wordt in het artikel uitgelegd. Een spiegel- en draaisymmetrie wordt bijvoorbeeld weergegeven door * wat precies ook weergeeft wat de symmetrieassen voor lijnsymmetrie doen: die snijden elkaar in één punt: het punt van symmetrie (waar dan weer om kan worden gedraaid). Hoe de wiskundigen tot de zeventien typen zijn gekomen, wordt in het artikel uitgelegd op een manier die ook voor diegenen die zich niet in de achterliggende wiskundige theorieën hebben verdiept, nog te volgen is.

Voor leerlingen met wiskunde C is de achterliggende wiskunde vermoedelijk te lastig maar het idee dat er maar een beperkt aantal typen symmetrieën zijn waarmee je alle behangpatronen kunt maken, is natuurlijk wel heel interessant voor hen. Deze patronen zijn niet alleen te vinden in behang of tegeltjespatronen in kathedralen, maar ook in straten. Anna Canas da Silva beschrijft in haar vignette de zoektocht in Portugal naar tegelpatronen op straat. Een aantal daarvan is nog niet gevonden en de lezers wordt gevraagd om mee uit te kijken naar deze patronen. Een idee is om met de wiskunde-C-leerlingen op zoek te gaan naar voorbeelden van deze patronen in Nederland. De tekst van deze vignette is beschikbaar in het Duits, Engels en Arabisch. Een Nederlandse vertaler wordt nog gezocht. Iedereen is welkom om te vertalen.




figuur 2 Betegeling van de stoep in de Rua Garett in Lissabon met patroon * 4 2 2

Er staan nog veel meer leuke voorbeelden op de site, zoals over Google, cryptografie, eerlijk stemmen, matrices en digitale foto's, het verpakken van sinaasappels, chaos en voorspellingen, enzovoorts.

Pluspunten

- Er staat een flink aantal voorbeelden van leuke toepassingen van moderne wiskunde en vereenvoudigde uitleg van klassiek wiskunde.
- Het materiaal is vaak gemaakt door mensen die zeer bevlogen zijn over het onderwerp.
- Naast de vignettes vind je hier nog heel veel ander materiaal, zoals bijvoorbeeld recensies van websites en boeken.
- De website is in meerdere talen beschikbaar, waaronder Chinees, Frans, Duits, Italiaans, Arabisch, Khmer, Portugees. De vertaling wordt door vrijwilligers gedaan.
- De toepassing van wiskunde in het dagelijks leven kan aan de hand van voorbeelden goed zichtbaar worden gemaakt, ook voor leerlingen die niet zoveel met wiskunde hebben.

Minpunten

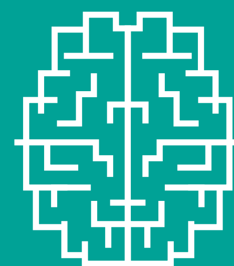
- De vignettes zijn niet in het Nederlands (althans: niet die ik heb gecontroleerd). Dit betekent dat je goed thuis moet zijn in de Engelse vaktermen.
- Veel onderwerpen sluiten niet direct aan bij de schoolwiskunde A of B en zijn dus meer geschikt als leuke anekdote of introductie van een lesuur (of een les voor de vakantie).
- De wiskunde zelf lijkt toch al vrij snel vrij pittig te worden en daardoor meer geschikt voor wiskunde B en D dan voor A of C.

Geschikt voor: havo, vwo bovenbouw.
Eindoordeel: 'aanschaffen'
Kosten: gratis
Getest op: laptop met Google Chrome Versie 62.0.3202.94 (64-bit)
Maker: ICMI (*http://www.mathunion.org/icmi/activities/klein-project/introduction/* over het Klein project)
Te vinden via: *http://blog.kleinproject.org/?p=1381*
Andere links:
http://knitty.com/ISSUEsummer06/PATTkleinbottle.html (breipatroon fles Klein)
https://www.youtube.com/watch?v=bNHdQHnCdN0 (video hoe Klein fles maken)

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L. Boels@chrlyceumdelft.nl*

PUZZEL 93-5



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

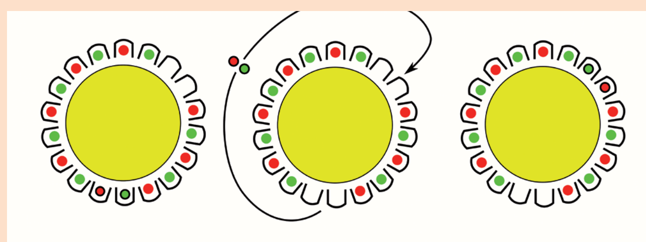
DUBBEL VRIJGEZELLENFEEST

Deze keer vereist de puzzel nauwelijks of geen wiskundige kennis, alleen gezond verstand. Het gaat over twee organisatorische probleempjes bij een dubbel vrijgezellenfeestje.

Voor een bruiloft zijn er voor een gezamenlijk vrijgezellenfeest $2n$ gasten uitgenodigd. Inclusief het toekomstige bruidspaar zijn er dus $n + 1$ vrouwen en $n + 1$ mannen. Eerst wordt er een foto gemaakt. En dat levert het eerste vermoedelijk niet al te moeilijke probleem op.
Er staan $2n$ stoelen keurig op een rijtje waarop alle gasten plaats nemen. De fotograaf vindt dat maar niets en stelt voor dat ze bij elkaar op schoot gaan zitten, dus twee per stoel, maakt niet uit wie bij wie. Daar wordt een spelletje van gemaakt:
Als dat mogelijk is mag een van de personen precies drie stoelen opschuiven, naar links of naar rechts. Deze gaat dus op de derde stoel bij iemand op schoot zitten, mits die schoot niet al bezet is. De lege stoel wordt verwijderd. Vervolgens mag zo mogelijk een volgende persoon, die nog niemand op schoot heeft en niet zelf al op schoot zit, op dezelfde manier drie stoelen opschuiven. Dit moet zodanig worden herhaald tot er op alle stoelen twee gasten zitten. Het bruidspaar vleit zich op de voorgrond en er wordt een mooie foto gemaakt.
Voor $n = 2$ blijkt het niet mogelijk om zo op alle stoelen twee personen te krijgen. Wel voor $n > 2$.
Opgave 1a - Geef een methode hoe dit lukt voor $n = 3$.
Opgave 1b - Toon aan dat het voor elke $n \geq 3$ mogelijk is, of laat zien dat dit niet het geval is.

Vervolgens is er een diner aan een ronde tafel.
Er staan $2n + 2$ stoelen klaar. De $2n$ gasten gaan allemaal keurig in een bonte rij zitten, dus afwisselend

man, vrouw, waarbij ze twee plaatsen naast elkaar vrij laten voor het bruidspaar.
Maar de ceremoniemeester vindt dat het nog steeds een vrijgezellenfeestje is en wil een maximale 'antibonte' tafelschikking. Dus alle mannen moeten naast elkaar komen te zitten. Dat geldt ook voor de vrouwen. En de twee vrije stoelen mogen de rij mannen of vrouwen niet onderbreken. Nu kan ook het bruidspaar zodanig plaatsnemen dat de tafelschikking nog steeds maximaal 'antibont' kan worden genoemd. Ook hier wordt weer een spelletje van gemaakt:
twee naast elkaar gezeten gasten geven elkaar de hand en nemen zo samen plaats op de twee lege stoelen. Wie van de twee links zat, zit daarna dus weer links. Zie figuur 1.



figuur 1

Vervolgens doen weer twee naast elkaar gezeten gasten hetzelfde en gaan op de twee vrijgekomen stoelen zitten. Dit wordt herhaald tot alle mannen aansluitend naast elkaar zitten en ook alle vrouwen. Het is wel toegestaan dat daarbij een (of meer) gasten meerdere keren zijn verhuisd. En ten slotte kan ook het bruidspaar zo gaan zitten dat de schikking nog steeds maximaal antibont is. Elke keer dat er twee gasten van zetel veranderen noemen we een zet.
Met $n = 2$ kan dit met slechts één zet.
We beweren: Voor $n > 2$ lukt dat met n zetten.
Opgave 2a - Geef aan hoe dit kan voor $n = 3$, tot en met $n = 7$ in steeds n zetten, beginnend met een bonte rij.

Soms is het mogelijk om van een verplaatsingsschema voor $2n$ gasten een schema te maken voor $2n + 2$ gasten. Er worden dan twee stoelen naast elkaar ergens tussen gezet waarop de extra gasten gaan zitten. En bij de eerste n zetten moeten precies dezelfde mensen van plaats verwisselen zoals dat werd gedaan bij het schema voor $2n$ mensen. Na die n zetten mag er nog een extra zet worden gedaan om een maximale antibonte rij te maken. En dan hebben we een oplossing voor $2n + 2$ gasten.
Opgave 2b - Probeer zo een oplossing voor $n = 3$ om te bouwen tot een oplossing voor $n = 4, 5,...$ En dat zo ver mogelijk, met steeds een zet extra.

We beweerden al dat het altijd mogelijk is een verplaatsingsschema te vinden in n zetten met $2n$ gasten en dus $2n + 2$ stoelen.

Opgave 3 - Bewijs dit door bijvoorbeeld een algoritme te geven hoe zo'n schema er uit kan zien voor een gegeven n.

Ook zagen we dat het voor $n < 3$ met minder dan n zetten lukt.
Extra - Kun je aantonen dat het voor $n \geq 3$ nooit zal lukken om met minder dan n zetten een maximaal 'antibonte' rij te maken? Wellicht kan althans een poging tot dit bewijs je helpen bij het vinden van een antwoord op opgave 2 en 3.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij je idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 16 april binnen zijn.

 *vakbladeuclides.nl/935puzzel*

Op de website *https://nvvw.nl/euclides/puzzel* staat behalve de uitwerking van de puzzel uit *Euclides* 93-3 ook een aanvulling op de uitwerking van puzzel 93-1: een bewijs van Frans van Hoeve voor de extra opgave dat veel korter is dan het bewijs dat wij gaven in de uitwerking.

Top 10 ladderstand na 93-3	
J. Remijn	150
H. Linders	146
K. Vugs	137
M. Woldinga	105
M. Rijniers	89
F. van Hoeve	89
F. Göbel	87
K. van der Straaten	78
R. Stolwijk	76
B. Groot	62

We feliciteren Jos Remijn van harte met de ladderprijs.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallengange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2018

3/4 en 4/4 — **Veldhoven**
Nederlands Mathematisch Congres

vr 13/4 — **Groningen**
Bèta-brede docentendag 2018
Organisatie: Science LinX en Expertisecentrum Vakdidactiek Noord

vr 14/9 — **Eindhoven**
Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade 2018

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 93

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	8 mei 2018	5 maart 2018
7	26 juni 2018	30 april 2018

CASIO®

Casio fx-CG50

Een mooi nieuw design met de vertrouwde functionaliteit!

De Casio fx-CG50 is de vervanger van de fx-CG20. Hij heeft de vertrouwde functionaliteit plus een aantal handige toevoegingen. Onderscheidend zijn de carbon look, heldere stevige toetsen en verdiept beeldscherm met minder kans op beschadiging. Dit voor dezelfde prijs als de fx-CG20!



CvTE goedgekeurd

Bestel direct uw docentenexemplaar voor maar € 39,50*
Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer.

Bekijk de video's op: www.youtube.com/c/CASIOCOLLEGE

* Inclusief btw en verzending